

## A teoria de tudo: uma introdução elementar

Edval J. P. Santos

*Laboratório de Dispositivos e Nanoestruturas, Núcleo de Engenharia na Escala Nanométrica, UFPE, Recife, Brasil.*<sup>a)</sup>

(Dated: 21 March 2023)

Essa é uma introdução elementar à busca pela teoria de tudo. Uma espécie de passeio turístico. Apresenta-se inicialmente as equações de James Clerk Maxwell com monopólos magnéticos como elaboradas por Paul Adrien Maurice Dirac. Antes de prosseguir é necessário fazer um rápido passeio pela Teoria da Relatividade. Em seguida mostra-se como as equações de Maxwell podem ser escritas de forma compacta na notação relativística. Essas equações representam a primeira grande unificação das leis da Natureza. Em seguida apresenta-se a ideia de Theodor Franz Eduard Kaluza e Oskar Benjamin Klein que introduz a quinta dimensão para unificar eletromagnetismo com gravitação. O espaço-tempo tem quatro dimensões e a “gravidade” na quinta dimensão é percebida nas outras dimensões como eletromagnetismo. Essa ideia é a base das teorias modernas de unificação inclusive a teoria da corda que utiliza dez dimensões. Para apresentar a teoria da corda introduz-se a corda relativística para obter a ação de Yoichiro Nambu e Tet-suo Goto. Apresenta-se a teoria quântica no contexto da integral do caminho como utilizada por Richard Phillips Feynman. Finalmente discute-se a quantização da corda e como surge a teoria-M proposta por Edward Witten na busca pela teoria de tudo.

Keywords: Eletromagnetismo, Teoria quântica, Ação, Teoria da corda.

*“You see, ya can’t please everyone so ya got to please yourself” (Rick Nelson em Garden Party, 1972). Este texto é dedicado aos 25 anos do Laboratório de Dispositivos e Nanoestruturas. Também é um esforço incompleto para responder a pergunta da estudante Maria Augusta do Rego Barros Fernandes Lima: “O que é a teoria da corda?”.*

### I. INTRODUÇÃO

Os fenômenos naturais sempre capturaram a imaginação humana. Pode-se imaginar há dezenas de milhares de anos atrás o homem primitivo admirado ou assustado com o nascer do Sol, a luz da Lua, as estrelas, o meteoro, a chuva, o furacão, o fogo, o terremoto, o mar, o frio, a neve, etc. A partir da observação tenta-se elaborar os mais diversos tipos de explicação. Há apenas 1000 atrás surgiu o método científico elaborado por Abu Ali al-Hasan Ibn Al-Haytham (965-1040), em Latim é conhecido como Al-Hazen. O método científico é o maior patrimônio da civilização. Esse método em conjunto com a óptica de Al-Hazen e a Matemática árabe foi utilizado por Galileu di Vincenzo Bonaulti de Galilei (1564-1642) para mudar a compreensão sobre o Universo a nossa volta. Desde então o progresso científico não só aumentou nossa compreensão do universo como contribuiu para o avanço tecnológico.

O texto está organizado em seis seções. Sendo essa introdução a primeira parte. Na segunda seção apresenta-se o processo de unificação das leis do eletromagnetismo. Na terceira seção apresenta-se a ação e a corda relativística. Na quarta seção apresenta-se a teoria quântica. Na quinta seção tem-se a apresentação resumida da busca pela teoria M-brana para que possa ser utilizada como a teoria de tudo. Finalmente a conclusão.

---

<sup>a)</sup>Electronic mail: [edval@ee.ufpe.br](mailto:edval@ee.ufpe.br) or [e.santos@expressmail.dk](mailto:e.santos@expressmail.dk); <http://www.ee.ufpe.br>.

## II. UNIFICAÇÃO DAS LEIS DO ELETROMAGNETISMO

No século XIX ocorreu a primeira grande unificação das leis da Natureza quando James Clerk Maxwell (1831-1879) percebeu que ao aplicar o princípio de conservação da carga era possível colocar sobre uma mesma estrutura matemática fenômenos tão diferentes como eletricidade, magnetismo e luz. De acordo com a proposta de Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) esse conjunto de leis pode ser escrito de maneira bastante simétrica com a introdução do monopolo magnético.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = J_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3)$$

$$-\nabla \times \vec{E} = J_m + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

em que  $\rho_e$  é a densidade de carga elétrica em Coulomb/m<sup>3</sup> e  $\rho_m$  é a densidade de carga magnética em Weber/m<sup>3</sup>.

A Equação 3 é a equação de Ampère como modificada por James Clerk Maxwell. Note-se que se for aplicado o divergente na equação de Ampère na Equação 3 obtem-se a grande sacada de James Clerk Maxwell para unificar as leis. Ele percebe que a equação de conservação da carga elétrica indica que tem um termo faltando. Esse termo tem unidade de corrente elétrica e recebeu o nome de corrente de deslocamento.

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = 0 = \nabla \cdot J_e + \nabla \cdot \left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \nabla \cdot J_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (5)$$

Se for calculado o rotacional da mesma equação em um meio livre de cargas obtem-se a equação da onda.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \nabla \times \vec{D}}{\partial t} = -\epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Usa-se que  $\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$ . De maneira equivalente para o campo elétrico. Usa-se o fato que  $\mu_o$  e  $\epsilon_o$  são constantes.

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{D} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}} \quad (7)$$

A velocidade da onda é a velocidade da luz,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (8)$$

em que  $\epsilon_o = 8,85418 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  é a permissividade do vácuo e  $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  é a permeabilidade do vácuo.

Por um breve período a interpretação da luz como onda ganhou força. Foi então comprovado experimentalmente por Albert Abraham Michelson (1852-1931) e Edward Williams Morley (1838-1923) que a velocidade da luz não depende do sistema de referência. A velocidade da luz é uma constante da Natureza. Essa e diversas outras observações experimentais demonstraram que o conhecimento obtido até então estava incompleto. Assim, no início do século XX foram elaboradas duas teorias que mudaram completamente nossa visão dos fenômenos naturais: **teoria da relatividade** e **teoria quântica**.

### A. Métrica e teoria da relatividade

Com a teoria da relatividade unifica-se o espaço e o tempo de maneira que a posição da partícula clássica é escrita em quatro dimensões. Utiliza-se o índice grego para indicar o componente. De maneira que para o componente  $x_\mu$  tem-se  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Define-se que a coordenada  $\mu = 0$  está relacionada ao tempo. Na notação da teoria da relatividade a posição dos índices tem significado como é apresentado mais adiante.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (9)$$

Para medir distâncias no espaço-tempo é necessário definir a métrica. Para o espaço-tempo plano essa métrica é conhecida como métrica de Hermann Minkowski (1864-1909) em que há duas escolhas de sinais:

- (+ - - -),

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad x_\mu = (ct, -x, -y, -z) \quad (10)$$

- (- + + +),

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad x_\mu = (-ct, x, y, z) \quad (11)$$

As duas escolhas são equivalentes. A primeira escolha é comum em física de partículas e a segunda escolha é comum em teoria da relatividade. A distribuição de sinais positivos e negativos é denominada de assinatura da métrica. Em Matemática a assinatura da métrica é a quantidade de auto-valores positivos, negativos e nulos da matriz associada à métrica. Alguns autores preferem usar  $\mu = 4$  para a coordenada do tempo e também representam o tempo como um número complexo,  $x^4 = ict$ , para que a métrica seja positiva. Nesse texto utiliza-se a primeira escolha de sinais (+ - - -) para a métrica de Minkowski. Para o espaço-tempo plano com essa escolha de sinais para a métrica de Minkowski, escreve-se a matriz da métrica

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Note-se que  $[\eta_{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}]^{-1} = [\eta^{\mu\nu}]$ . Independente da escolha de sinais, o determinante da matriz  $[\eta_{\mu\nu}]$  é negativo. Para obter valor positivo define-se

$$-g \equiv -\mathbf{det}\{\eta_{\mu\nu}\}. \quad (13)$$

Na aplicação da teoria da relatividade obtém-se equações em que é necessário realizar diversas somas. Para evitar escrever grande quantidade de símbolos de somatório,  $\Sigma$ , Albert Einstein (1879-1955) desenvolveu a convenção em que índices repetidos do mesmo lado da equação subentende-se que está sendo somado de maneira que as equações ganham aspecto simplificado. Para ilustrar essa notação considere-se o produto interno. Define-se o produto interno entre dois quadrivetores do espaço plano,

$$X \cdot Y = X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu = X^0 Y^0 - X^1 Y^1 - X^2 Y^2 - X^3 Y^3. \quad (14)$$

Exemplo: o produto interno é utilizado para calcular a relação energia-momento, que é invariante ao mudar o sistema de coordenadas, com o quadrimomento  $p = (\mathcal{E}/c, p_x, p_y, p_z)$ ,

$$p \cdot p = p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = (\mathcal{E}/c, p_x, p_y, p_z) \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p}. \quad (15)$$

em que  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ .

No referencial preso à partícula de massa  $m_0$  tem-se  $\vec{p} = (0, 0, 0)$  e  $\mathcal{E} = m_0 c^2$ .

$$p \cdot p = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{m_0^2 c^4}{c^2} - 0 \implies \boxed{\mathcal{E}^2 = m_0^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \quad (16)$$

## 1. Métrica

Pode-se aplicar o produto interno para calcular o diferencial de distância.

$$-ds^2 = -(cdt, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (17)$$

Diz-se que uma métrica é positiva-definida se  $ds^2 \geq 0$ . Note-se que a métrica de Minkowski não é positiva-definida como a métrica euclidiana.

- Para  $c^2 t^2 > r^2$  diz-se supremacia temporal (*timelike*),
- Para  $c^2 t^2 < r^2$  diz-se supremacia espacial (*spacelike*),
- Para  $c^2 t^2 = r^2$  diz-se supremacia luminosa (*lightlike*).

Em coordenadas esféricas,

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (18)$$

Métrica de Karl Schwarzschild (1873-1916) para o **buraco-negro**,

$$-ds^2 = - \left( 1 - \frac{2G_{Newton} M}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \left( 1 - \frac{2G_{Newton} M}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (19)$$

Como exemplo de métrica do espaço-tempo curvo tem-se a métrica de Alexander Alexandrovich Friedmann (1888-1925) e Georges-Henri Édouard Lemaître (1894-1966), Howard Percy Robertson (1903-1961), Arthur Geoffrey Walker (1909-2001),

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 a(t)^2 d\theta^2 + r^2 a(t)^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (20)$$

em que  $a(t) = R(t)/r$  e  $k = +1, 0, -1$  é o índice de curvatura que indica o tipo de curvatura da métrica.

$$k = \begin{cases} +1 \rightarrow \text{Elíptico} \\ 0 \rightarrow \text{Plano} \\ -1 \rightarrow \text{Hiperbólico} \end{cases} \quad (21)$$

A métrica do espaço-tempo em que o sistema de referência não é ortogonal apresenta termos fora diagonal não-nulos.

## B. Mudança de sistema de coordenadas

A teoria da relatividade faz uso do conceito de **tensor** que é um ente matemático ou objeto algébrico que generaliza o conceito de vetor e matriz. O tensor independe do sistema de coordenadas. Se for escolhido um sistema de referência o tensor pode ser representado por um conjunto de componentes. **A representação ou componentes do tensor dependem somente da orientação relativa ou proporção do sistema de coordenadas, i.e., depende apenas da informação local e não absoluta.** Nesse contexto o vetor posição absoluta não é um tensor, pode ser considerado um pseudo-tensor, mas a diferença entre vetores posição é um tensor.

O tensor ou grandeza física pode ainda ser classificado em **covariante** ou **contravariante** a depender de como os componentes mudam com a mudança do sistema de referência como ocorre se o observador for trocado. **O tensor não muda mas os componentes mudam**, i.e., quando o observador ou sistema de referência é modificado, os componentes mudam para que o tensor não mude.

Considere-se a mudança de sistemas de coordenadas,  $x \rightarrow y$ , com rotação, dilatação ou deformação, sem translação,

$$y_\mu = \sum_\nu \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\nu} x_\nu = \sum_\nu a'_\mu{}^\nu x_\nu \longrightarrow Y = AX. \quad (22)$$

Para um quadrivetor,  $v$ , invariante, i.e., que independe do sistema de coordenadas,

$$v = \sum_\mu v'^\mu y_\mu = \sum_\mu v'^\mu \sum_\nu a'_\mu{}^\nu x_\nu = \sum_\nu \left( \sum_\mu v'^\mu a'_\mu{}^\nu \right) x_\nu = \sum_\nu v^\nu x_\nu = v \quad (23)$$

Note-se que os componentes do quadrivetor,  $v$ , muda de maneira inversa à mudança do sistema de coordenadas.

$$v^\nu = \sum_\mu v'^\mu a'_\mu{}^\nu \longrightarrow v = v' A \implies v' = v A^{-1} \quad (24)$$

Se  $v$  é a distância e a escala é dividida por 100, de metro para centímetro, então o valor do componente é multiplicado por 100 para que continue a indicar a mesma distância. Diz-se que o vetor invariante é **contravariante** em relação à mudança de sistemas de coordenadas.

O produto interno entre o quadrivetor posição e o quadrivetor propagação de onda é um invariante pela mudança do sistema de coordenadas,

$$\hat{k} \cdot \hat{r} = (A^{-1} \hat{k}) \cdot (A \hat{r}) = \hat{k}' \cdot \hat{r}'. \quad (25)$$

Note-se que os componentes de  $k$  variam da mesma maneira que o sistema de coordenadas.

$$k = \sum_\mu k'_\mu \hat{k}'^\mu = \sum_\mu k'_\mu \sum_\nu (a^{-1})^\mu{}_\nu \hat{k}^\nu = \sum_\nu \left( \sum_\mu k'_\mu (a^{-1})^\mu{}_\nu \right) \hat{k}^\nu = \sum_\nu k_\nu \hat{k}^\nu = k \quad (26)$$

$$k_\nu = \sum_\mu k'_\mu (a^{-1})^\mu{}_\nu \longrightarrow k = k' A^{-1} \implies k' = k A \quad (27)$$

Diz-se que o quadrivetor  $k$  é **covariante** em relação à mudança de sistemas de coordenadas. Tem-se que  $\vec{r}$  com unidade de comprimento é o vetor contravariante e  $\vec{k}$  com unidade de inverso do comprimento é o vetor covariante ou covetor, i.e., é o vetor do espaço dual representado com a base recíproca.

- **Covariante** - os componentes mudam de maneira igual à mudança do sistema de referência. Utiliza-se a mesma matriz de transformação para os componentes e o sistema de coordenadas. Esse tipo de transformação aplica-se ao funcional a exemplo do vetor gradiente. Na notação de Einstein o índice é posicionado embaixo.

$${}^y f = f(y_\mu) = f(a_\mu^\nu x_\nu) = a_\mu^\nu f(x_\nu) = A {}^x f \quad (28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^\mu} \hat{y}^\mu = \frac{\partial f}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \hat{x}^\nu = \left( \frac{\partial f}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right) \hat{x}^\nu = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \hat{x}^\nu \quad (29)$$

- **Contravariante** - os componentes mudam de maneira oposta ou inversa à mudança do sistema de referência, i.e., os componentes do vetor contra-variavam. A matriz de transformação dos componentes é a inversa da matriz de transformação do sistema de coordenadas. Exemplo é o vetor posição relativa, tangente, velocidade, aceleração, momento e força. Na notação de Einstein o índice é posicionado em cima.

$$v = v^\mu \hat{e}_\mu = \left( v'^\nu (U^{-1})^\mu_\nu \right) U^\nu_\mu \hat{e}'_\nu = v'^\nu \hat{e}'_\nu = v \quad (30)$$

Os componentes do tensor nos vetores da base são denominados de componentes contravariantes e os componentes do tensor nos vetores da base recíproca são denominados de componentes covariantes. No espaço euclidiano os componentes contravariantes e covariantes são idênticos. No espaço de Minkowski pode-se passar de componente contravariante para covariante e vice-versa ao multiplicar pelo tensor métrico. A posição dos índices não é importante no espaço-tempo plano, mas faz diferença no espaço-tempo curvo.

**Esse conceito não deve ser confundido com leis covariantes, para esse caso é mais apropriado dizer leis invariantes.**

### C. Transformação de Lorentz

Considere-se o caso de mudança de sistema de referência. Por exemplo, dois observadores que estão em velocidade relativa constante entre eles. Esse tipo de transformação é classificada como transformação de Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928). Para que todos os sistemas de referência sejam equivalentes exige-se que essa transformação seja linear para que a inversa também seja linear. Pelo menos para a separação típica entre observadores dentro do Universo.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \lambda_3^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \lambda_3^1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_0^3 & \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

em que  $\lambda_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ .

Para ilustrar considere-se o caso em que o movimento ocorre na direção  $x$ , que os dois sistemas de referência coincidem em  $t = t' = 0$  e que a velocidade entre eles é  $U$ .

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & 0 & 0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$cdt' = \lambda_0^0 cdt + \lambda_1^0 dx \quad (33)$$

$$dx' = \lambda_0^1 cdt + \lambda_1^1 dx \quad (34)$$

Outra restrição é que a luz propaga com a mesma velocidade  $c$  em todos os sistemas de referência.

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (35)$$

Como os eixos  $y'$  e  $y$ ,  $z'$  e  $z$  são idênticos.

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (36)$$

Substitui-se as expressões na Equação 33 e na Equação 34 para obter,

$$\lambda_0^0 \lambda_1^0 - \lambda_0^1 \lambda_1^1 = 0 \quad (37)$$

$$(\lambda_0^0)^2 - (\lambda_0^1)^2 = 1 \quad (38)$$

$$(\lambda_1^1)^2 - (\lambda_1^0)^2 = 1 \quad (39)$$

Define-se

$$-\beta \equiv \frac{\lambda_0^1}{\lambda_0^0} = \frac{\lambda_1^0}{\lambda_1^1} \quad (40)$$

$$\gamma^2 \equiv \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (41)$$

Reescreve-se

$$(\lambda_0^0)^2 - \beta^2 (\lambda_0^1)^2 = 1 \implies (\lambda_0^0)^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \quad (42)$$

$$(\lambda_1^1)^2 - \beta^2 (\lambda_1^0)^2 = 1 \implies (\lambda_1^1)^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \quad (43)$$

Exige-se que o determinante da transformação deve ser unitário.

$$\lambda_0^0 \lambda_1^1 - \lambda_0^1 \lambda_1^0 = 1 \implies \lambda_0^0 \lambda_1^1 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \quad (44)$$

Como os sistemas de coordenadas têm mesma orientação, i.e., não mudam de sinal, escolhe-se a raiz positiva,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ .

$$\Lambda = (\lambda_\alpha^\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Das expressões na Equação 33 e na Equação 34 obtém-se  $\beta = U/c$  para o sistema  $x'$  que se desloca com velocidade  $U$  no sentido positivo do sistema  $x$ . Para o sistema de coordenadas  $x'$  em que a partícula está em repouso, o tempo é denominado de **tempo próprio**,  $\tau$ . Para

obter a velocidade da partícula no sistema de coordenadas  $x$ , calcula-se a transformada inversa.

$$\begin{pmatrix} \gamma_U & \beta_U \gamma_U & 0 & 0 \\ \beta_U \gamma_U & \gamma_U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_U \begin{pmatrix} c \\ U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Em um terceiro sistema de referência que se move com velocidade  $V$  em relação ao sistema de referência  $x$ , tem-se que a velocidade do sistema de referência  $x'$  nesse terceiro sistema de referência,

$$\begin{pmatrix} \gamma_V & -\beta_V \gamma_V & 0 & 0 \\ -\beta_V \gamma_V & \gamma_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_U & \beta_U \gamma_U & 0 & 0 \\ \beta_U \gamma_U & \gamma_U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_V \gamma_U \left(1 - \frac{UV}{c^2}\right) \begin{pmatrix} c \\ \frac{U-V}{(1-\frac{UV}{c^2})} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Note-se que,

$$\gamma_V \gamma_U \left(1 - \frac{UV}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(U-V)^2}{c^2(1-UV/c^2)^2}}}. \quad (48)$$

Examine-se o cálculo do produto interno quando se muda de coordenadas,

$$x' \cdot y' = x'^{\mu} \eta_{\mu\nu} y'^{\nu} = x^{\sigma} \lambda_{\sigma}^{\mu} \eta_{\mu\nu} \lambda_{\xi}^{\nu} y^{\xi} = x^{\sigma} \eta_{\sigma\xi} y^{\xi} \quad (49)$$

A equação de Schrödinger não é invariante pela transformação de Lorentz. A equação de Dirac e a equação de Klein-Gordon são invariantes pela transformação de Lorentz. Outra classe de transformação de interesse é a transformação de Jules Henri Poincaré (1854-1912) que envolve rotação e translação.

#### D. Velocidade e aceleração

As grandezas físicas devem ser invariantes pela transformação de Lorentz. Assim pode-se definir a velocidade e a aceleração no referencial que viaja com a partícula em que o tempo é o tempo próprio  $\tau$ .

$$U^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau} = (c, U_x, U_y, U_z) \quad (50)$$

$$a^{\mu} = \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \tau^2} = (0, a_x, a_y, a_z) \quad (51)$$

No referencial que propaga com a partícula  $U_x = U_y = U_z = 0$ . De maneira que no referencial que a partícula viaja com velocidade,  $\vec{v}$ ,

$$U^{\mu} U_{\mu} = c^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 \quad (52)$$

em que  $\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$ ,  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$  e  $\gamma = \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ .

No novo referencial em que a partícula se move com velocidade constante,  $\vec{v}$ .

$$v^{\mu} = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \quad (53)$$



Para uma partícula em  $x^\mu = (ct, x, 0, 0)$  submetida a aceleração constante,  $\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2}$ ,

$$a^\mu a_\mu = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \tau^2} = -a^2 = c^2 \left( \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \right)^2. \quad (54)$$

Pode-se reescrever

$$1 = -\frac{c^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \right)^2. \quad (55)$$

Utiliza-se a identidade trigonométrica para obter a solução,

$$t = \frac{a}{\omega^2 c} \sinh(\omega \tau) \quad (56)$$

$$x = \frac{a}{\omega^2} \cosh(\omega \tau). \quad (57)$$

Usa-se que  $x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - x^2 = -a^2/\omega^4$ . Então  $x = \frac{a}{\omega^2} \sqrt{1 + \omega^4 c^2 t^2/a^2}$ . Pode-se escrever  $\omega = a/c$ . No limite em que  $t \rightarrow \infty$ , a velocidade,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega^2 c^2 t/a}{\sqrt{1 + \omega^4 c^2 t^2/a^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2/c^2}} = c \quad (58)$$

## E. Equações de Maxwell na teoria da relatividade

Como o campo elétrico e o campo magnético são faces de um mesmo objeto. É mais apropriado escrever em termos do campo eletromagnético que combina os dois no tensor eletromagnético. Dessa maneira, as equações de Maxwell podem ser escritas na notação da teoria da relatividade,

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \longrightarrow \boxed{\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j_e^{\nu}} \quad (59)$$

$$\sum_{\nu} \partial_{\mu} G^{\mu\nu} \longrightarrow \boxed{\partial_{\mu} G^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_m^{\nu}} \quad (60)$$

$$\sum_{\nu} \partial_{\mu} \tilde{G}^{\mu\nu} \longrightarrow \boxed{\partial_{\mu} \tilde{G}^{\mu\nu} = \epsilon_0 j_m^{\nu}} \quad (61)$$

em que  $j_e^{\mu} = (c\rho_e, J_{e,x}, J_{e,y}, J_{e,z})$ ,  $j_m^{\mu} = (c\rho_m, J_{m,x}, J_{m,y}, J_{m,z})$ ,  $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ ,  $\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t$ ,  $\partial_1 = \partial_x$ ,  $\partial_2 = \partial_y$  e  $\partial_3 = \partial_z$ .

Os vários tensores eletromagnéticos são definidos a seguir. Note-se que para baixar os índices utiliza-se a identidade,

$$F_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu} \quad F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu}. \quad (62)$$

Na escolha (+ - - -) para a métrica adotada nesse texto tem-se as seguintes definições para o tensor eletromagnético,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ -B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ -B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Outra possibilidade,

$$\tilde{G}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x/c & -H_y/c & -H_z/c \\ H_x/c & 0 & D_z & -D_y \\ H_y/c & -D_z & 0 & D_x \\ H_z/c & D_y & -D_x & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x/c & H_y/c & H_z/c \\ -H_x/c & 0 & D_z & -D_y \\ -H_y/c & -D_z & 0 & D_x \\ -H_z/c & D_y & -D_x & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Na ausência de corrente, ao fazer a transformação  $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$  passa-se das equações do campo elétrico para as equações do campo magnético,  $F^{\mu\nu} \rightarrow G^{\mu\nu}$ . Essa é a transformação da dualidade ou transformação-D. Ela pode ser generalizada para um ângulo arbitrário  $\xi$ ,

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\text{sen} \xi \\ \text{sen} \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \quad (66)$$

A escolha do ângulo  $\xi$  rotaciona elétrico em magnético e vice-versa. A noção de dualidade aparece em teoria da corda, a candidata à teoria de tudo.

Se for utilizado  $\tilde{G}^{\mu\nu}$  a transformação passa a ser

$$\begin{pmatrix} \vec{H} \\ \vec{D} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Invariantes de Lorentz:

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \left( |\vec{B}|^2 - \frac{1}{c^2} |\vec{E}|^2 \right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{4\mu_o} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}} \quad (68)$$

$$\frac{1}{2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = \left( -|\vec{B}|^2 + \frac{1}{c^2} |\vec{E}|^2 \right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{4\mu_o} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}} \quad (69)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{G}_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} = \left( -\frac{1}{c^2} |\vec{H}|^2 + |\vec{D}|^2 \right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{4\epsilon_o} \tilde{G}_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}} \quad (70)$$

Pode-se ainda escrever  $F^{\mu\nu}$  e  $G^{\mu\nu}$  em termos do potencial quadri-dimensional,

$$A_e^\mu = (\phi_e/c, A_{e,x}, A_{e,y}, A_{e,z}) \quad (71)$$

$$A_m^\mu = (\phi_m/c, A_{m,x}, A_{m,y}, A_{m,z}) \quad (72)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A_e^\nu - \partial^\nu A_e^\mu \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{e,\nu} - \partial_\nu A_{e,\mu} \quad (73)$$

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu A_m^\nu - \partial^\nu A_m^\mu \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{m,\nu} - \partial_\nu A_{m,\mu} \quad (74)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A_e^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A_e^\mu = \mu_o j_e^\nu \quad (75)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A_m^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A_m^\mu = \frac{1}{c} j_m^\nu \quad (76)$$

Como exemplo da transformação do quadri vetor potencial devido a mudança de sistema de referência, considere-se  $A^\mu = (-\frac{E}{c}y, -\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0)$ . Após a transformação de Lorentz para o sistema  $x'$  que se move com velocidade  $c\beta$  em relação ao sistema  $x$ , obtem-se

$$A'^\mu = \lambda_\nu^\mu A^\nu = \gamma \left( (-E/c + \beta B/2)y', (\beta E/c - B/2)y', \frac{B}{2}(c\beta t' + x'), 0 \right) \quad (77)$$

em que  $(ct, x, y, z) = (\gamma ct' + \gamma \beta x', \gamma \beta ct' + \gamma x', y', z')$ .

Agora pode-se calcular o campo elétrico e a densidade de fluxo magnético.

$$\vec{E}' = -\nabla' \phi' - \frac{\partial}{\partial t'} \vec{A}' = \gamma(0, E - c\beta B, 0) \quad (78)$$

$$\vec{B}' = \nabla' \times \vec{A}' = \gamma(0, 0, B - \beta E/c) \quad (79)$$

Note-se que para  $B = 0$  o observador no sistema de referência em movimento mede  $B' \neq 0$ . Para  $B \neq 0$  e velocidade do novo sistema de referência  $c\beta = E/B$  o campo elétrico é nulo.

## F. Eletromagnetismo no espaço curvo

No espaço curvo a métrica não é constante. Assim passa-se do tensor métrico de Minkowski,  $\eta^{\mu\nu}$ , para o tensor métrico do espaço curvo,  $g^{\mu\nu}$ .

$$F^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} \quad (80)$$

Para a densidade de força de Lorentz,

$$f_\mu = F_{\mu\nu} J^\nu \quad (81)$$

submetida ao eletromagnetismo e gravidade,

$$\frac{dp_\mu}{dt} = (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha p_\alpha + qF_{\mu\nu}) \frac{dx^\nu}{dt} \quad (82)$$

em que  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  são os coeficientes de conexão ou símbolos de Christoffel da curvatura espacial.

## G. Corrente elétrica e relatividade

Na eletrônica busca-se modelar o transporte de carga entre dois terminais. A maneira como a carga é transportada em termos do campo externo aplicado determina a função do dispositivo e possibilita realizar as diversas aplicações tecnológicas. Considere-se o quadri vetor densidade de corrente elétrica,  $j_e = (c\rho_e, J_{e,x}, J_{e,y}, J_{e,z})$ ,

$$j_e^\mu = \rho_e \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \rho_e U^\mu = \rho_{e,U} U^\mu, \quad (83)$$

em que  $\rho_e$  é a densidade de carga elétrica no referencial que se move na mesma velocidade da carga,  $\rho_{e,U}$  é a densidade de carga elétrica medida por um observador que observa a carga se mover com velocidade  $U$  e  $dt/d\tau = \gamma$ .

Por exemplo, considere-se cargas,  $q_-$ , em movimento com velocidade  $\vec{U}$  em um fio de material condutor que está em repouso para o observador. Antes das cargas entrarem em movimento o condutor é neutro. Assume-se que todas as cargas apresentam mesma velocidade.

Considere-se uma carga de teste que se move com velocidade  $\vec{V}$  ao lado do fio e calcule-se a força sobre ela. Aplica-se a lei de Gauss em uma casca cilíndrica que envolve o fio de maneira que o eixo de simetria coincide com o fio.

$$\int \vec{D} \cdot dA = Q \implies \vec{E}(r) = \frac{\rho_{liq} A}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (84)$$

No referencial do laboratório o campo elétrico é nulo porque o fio é neutro,  $\rho_{liq} = 0$ . De maneira que a força elétrica sobre a carga de teste deveria ser nula. É necessário examinar com mais cuidado, considere-se a corrente de deriva,

$$I = q_- n_- U A \quad (85)$$

em que  $A$  é a área da secção transversal do fio.

No referencial da carga de teste, as cargas no fio se movem com velocidade,

$$v_- = -\frac{(U + V)}{1 + UV/c^2}. \quad (86)$$

Por outro lado nesse referencial o fio se move. De maneira que os íons fixos do fio tem velocidade,

$$v_+ = -V. \quad (87)$$

No referencial da carga de teste observa-se um desbalanço da carga,

$$\rho_{liq} = q(n_+ - n_-) = qn_0(\gamma_+ - \gamma_-) = qn_0\gamma_U(1 - \gamma_V(1 + UV/c^2)) \approx -qn_0\gamma_U\gamma_V\frac{UV}{c^2} \quad (88)$$

Note-se que para  $V \neq 0$ , tem-se  $\rho_{liq} \neq 0$ .

A força percebida pela carga de teste como observada no referencial do laboratório,

$$F = \frac{qE}{\gamma_V} = -\frac{q^2 A}{2\pi\epsilon_0 r} n \frac{UV}{c^2} = qV \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = qVB \quad (89)$$

Essa visualização simplificada é apenas para ilustrar a relação íntima entre eletricidade e magnetismo. Essa não é a fonte exclusiva de magnetismo. Apenas ilustra a transformação do campo elétrico em magnético, como também se pode ter a transformação inversa.

Agora, considere-se dois observadores que se deslocam um em relação ao outro. Ao buscar conciliar os resultados observados por cada um deles, i.e., mudar o sistema de coordenadas, é necessário aplicar a transformação de Lorentz. Para o quadri-vetor densidade de corrente elétrica,

$$j_e^{\nu} = \lambda_{\mu}^{\nu} j_e^{\mu} \quad (90)$$

De acordo com a teoria da relatividade ocorre contração do comprimento ou dilatação do tempo, o que afeta a densidade de carga e a densidade de corrente. Para o sistema que se move na direção  $x$  com velocidade  $U$ ,

$$c\rho'_e = \gamma c\rho_e - \beta\gamma J_{e,x} = \gamma \left( c\rho_e - \frac{U}{c} J_{e,x} \right) \quad (91)$$

$$J'_{e,x} = -\gamma\beta c\rho_e + \gamma J_{e,x} = \gamma(J_{e,x} - \rho_e U). \quad (92)$$

No entanto, a conservação da carga é invariante, i.e., é um invariante de Lorentz,

$$\partial'_\mu j'^\mu = \partial_\alpha (\lambda^{-1})^\alpha_\mu \lambda^\mu_\beta j^\beta = \partial_\alpha \delta^\alpha_\beta j^\beta = \partial_\alpha j^\alpha = 0. \quad (93)$$

A mudança também afeta o quadri-potencial,  $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$ .

$$\frac{\phi'}{c} = \gamma \frac{\phi}{c} - \beta\gamma A_x = \frac{\gamma}{c} (\phi - U A_x) \quad (94)$$

$$A'_x = -\beta\gamma \phi/c + \gamma A_x = \gamma \left( A_x - \frac{U}{c^2} \phi \right) \quad (95)$$

É necessário resolver a equação da continuidade na Equação 93 na presença do campo eletromagnético,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j_e^\nu. \quad (96)$$

Combine-se a isso a força eletromagnética que atua sobre a carga.

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} U_\nu \quad (97)$$

Como exemplo, considere-se uma carga elétrica submetida ao campo elétrico constante  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ . Como mostrado na Secção IID, a velocidade da carga,  $\vec{u} = (u_x, 0, 0) = (U, 0, 0)$ ,

$$u_x = U = \frac{qE_x t/m}{\sqrt{1 + \frac{q^2 E_x^2}{m^2 c^2} t^2}}. \quad (98)$$

Note-se que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_x = c. \quad (99)$$

Se ocorrer colisões/espalhamento a carga é freada e isso se traduz em resistividade que está associada à dissipação da energia cinética do portador de carga. Nessa condição a velocidade do portador de carga não é constante. Ele é acelerado, sofre a colisão e é freado. Em seguida é acelerado novamente. De maneira que se pode falar apenas da velocidade média. No regime de baixas velocidades,

$$j^\alpha = qn\langle v \rangle = qn\mu_\beta^\alpha E^\beta = \sigma_\beta^\alpha E^\beta. \quad (100)$$

em que  $\mu_\beta^\alpha$  é a matriz da mobilidade.

Sem considerar a corrente de deslocamento, para o caso relativístico, a densidade de corrente de deriva pode ser escrita em termos do quadri vetor velocidade de cada portador de carga.

$$j^\alpha = \sum_i q_i \int U_i^\alpha \delta^4(x - x_i(\tau_i)) d\tau_i \quad (101)$$

em que  $q_i$  é a carga,  $U_i$  é o quadri vetor velocidade,  $\tau_i$  é o tempo próprio da  $i$ -ésima partícula e  $\delta^4(\cdot)$  é a função delta de Dirac ou função impulso no espaço quadridimensional.

Acompanhar cada um dos portadores de carga não é computacionalmente eficiente. A alternativa é examinar o comportamento médio. Para isso é necessário obter a distribuição de probabilidade,  $f$ , que deve ser uma função da posição e momento de cada portador. Essa é conhecida como distribuição de Ferenz Jüttner. A evolução dessa distribuição de probabilidade contém a cinética dos portadores de carga. Em teoria de relatividade pode-se escrever em termos do tempo próprio.

$$\frac{\partial f(x^\mu, p^\mu)}{\partial x^\mu} p^\mu + \frac{\partial f(x^\mu, p^\mu)}{\partial p^\mu} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{df(x^\mu, p^\mu)}{d\tau} \quad (102)$$

De posse da distribuição de probabilidade calcula-se a média sobre todos os portadores.

$$\langle j^\alpha \rangle = \int j^\alpha f(x^\alpha, p^\alpha) dp^\alpha \quad (103)$$

Subentende-se que as grandezas relevantes a seguir são representadas pela média. Para simplificar a notação escreve-se  $\langle j^\alpha \rangle \rightarrow j^\alpha$ . Para o modelo mais simples assume-se que todos os portadores de carga se movem à velocidade constante igual à velocidade média e que a aproximação do tempo de relaxação pode ser utilizada para as colisões que mantém os portadores nessa velocidade. O vetor campo elétrico é substituído pelo tensor eletromagnético médio e postula-se que a relação entre o tensor eletromagnético médio aplicado e a densidade de corrente média é linear, como no caso não-relativístico. Assim busca-se a lei de Georg Simon Ohm (1789-1854) generalizada.

$$j^\alpha = \rho_o U^\alpha = c \sigma F^{\alpha 0} \quad (104)$$

em que  $\rho_o$  é a densidade de cargas livres no referencial que se move com a velocidade média para um observador que está estacionário em relação ao fio condutor.

Uma alternativa para escrever em termos do tensor eletromagnético completo é definir o tensor condutividade,  $\sigma_{\mu\nu}^\alpha$ ,

$$j^\alpha = \sigma_{\nu\mu}^\alpha F^{\mu\nu} = \sigma U_\nu (-\eta_\alpha^\nu) F^{\alpha\nu} \quad (105)$$

em que  $\sigma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \sigma (\eta_\mu^\alpha U_\nu - \eta_\nu^\alpha U_\mu) = -\sigma_{\nu\mu}^\alpha$ .

No referencial que se move com a velocidade média da carga,  $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$ , e na métrica  $(+ - - -)$ , o tensor condutividade tem apenas os seguintes elementos não-nulos,

$$\sigma'^1_{01} = \frac{1}{2} \sigma (\eta_0^1 U_1 - \eta_1^1 U_0) = \frac{c}{2} \sigma = -\sigma'^1_{10} \quad (106)$$

$$\sigma'^2_{02} = \frac{1}{2} \sigma (\eta_0^2 U_2 - \eta_2^2 U_0) = \frac{c}{2} \sigma = -\sigma'^2_{20} \quad (107)$$

$$\sigma'^3_{03} = \frac{1}{2} \sigma (\eta_0^3 U_3 - \eta_3^3 U_0) = \frac{c}{2} \sigma = -\sigma'^3_{30}. \quad (108)$$

Para um campo elétrico constante na direção  $x$  o tensor eletromagnético,  $F^{\mu\nu}$ , apresenta apenas duas componentes não nulas.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (109)$$

Agora é necessário transformar o tensor eletromagnético para o sistema de referência que viaja com a carga ( $F' = \Lambda F \Lambda^T$ ).

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda_\mu^\alpha F^{\mu\nu} \Lambda_\nu^\beta \quad (110)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (111)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

O campo elétrico na direção do movimento não é modificado. Assim, obtem-se a seguinte densidade de corrente elétrica,

$$j'^0 = 0 \quad (113)$$

$$j'^1 = \sigma'^1_{10} \left( -\frac{E_x}{c} \right) + \sigma'^1_{01} \left( \frac{E_x}{c} \right) = \sigma E_x \quad (114)$$

$$j'^2 = 0 \quad (115)$$

$$j'^3 = 0. \quad (116)$$

Para passar para o sistema do laboratório aplica-se a transformada inversa de Lorentz. Surge uma surpreendente densidade de carga proporcional ao campo elétrico, o que sugere que essa descrição pode estar incompleta!

$$j'^\alpha = (\lambda^{-1})^\alpha_\beta j^\beta \implies \begin{cases} j'^0 = c\rho'_e = \gamma \frac{U}{c} \sigma E_x, \\ j'^1 = J'_x = \gamma \sigma E_x \end{cases} \quad (117)$$

- Edward M. Purcell, David J. Morin, *Electricity and magnetism*, 3<sup>a</sup> Ed., Cambridge University Press (2013).
- David Tong, *Lectures notes on electromagnetism*, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge.
- Charles B. Thorn, *Lectures notes on electromagnetic theory I and II*, Department of Physics, University of Florida.
- B. J. Ahmedov, M. J. Ermamatov, *Electrical conductivity in general relativity*, arXiv:gr-qc/0608060 (2006), Phys.Lett. **15**, 137-151 (2002).
- Carlo Cercignani, Gilberto Medeiros Kremer, *Relativistic Boltzmann equation*, em *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Progress in Mathematical Physics, vol 22. Birkhäuser, Basel (2002).

## H. Unificação do eletromagnetismo e gravitação

A primeira proposta de unificação de gravitação com eletromagnetismo é a teoria clássica de Theodor Franz Eduard Kaluza (1885-1954) que em 1921 surpreendentemente introduz a quinta dimensão para incorporar a gravitação. Para indicar a posição da partícula no espaço de 5 dimensões no instante  $\tau$  são necessárias cinco componentes,

$$x(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau), x^4(\tau), x^5(\tau)). \quad (118)$$

As primeiras quatro dimensões do espaço-tempo é a gravitação tradicional e a “gravitação” na quinta dimensão é detectada como eletromagnetismo. Note-se que essa proposta não envolve a teoria quântica. Como visto na secção anterior o campo elétrico e o campo magnético podem ser escritos como componentes do tensor  $F^{\mu\nu}$ . Theodor Kaluza utiliza essa ideia para escrever o campo gravitacional,  $g_{\mu\nu}$ , e o vetor potencial,  $A_\mu$ , como componentes de um mesmo tensor,

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 e^{2\sigma} A_\mu A_\nu & \kappa e^{2\sigma} A_\mu \\ \kappa e^{2\sigma} A_\mu & e^{2\sigma} \end{pmatrix} \quad (119)$$

em que  $e^\sigma = \phi$  é um campo escalar e  $\kappa$  é o fator de escala.

Essa é uma matriz  $5 \times 5$  simétrica com 15 componentes independentes: dez componentes independentes estão relacionados com a métrica gravitacional, quatro componentes independentes estão relacionados com o potencial vetor e um componente independente está relacionado com o campo escalar. A métrica do espaço pentadimensional,

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2\tilde{g}_{\mu 5} dx^\mu dx^5 + \tilde{g}_{55} (dx^5)^2 \quad (120)$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi^2 (\kappa A_\nu dx^\nu + dx^5)^2. \quad (121)$$

A partir da definição da métrica calcula-se as conexões de Christoffel e o tensor de Ricci o que resulta nas equações de campo. Veja Apêndice A.2. Para o tensor pentadimensional de Ricci assume-se  $\tilde{R}_{ab} = 0$ . São 10 equações de Einstein modificadas, 4 equações de Maxwell modificadas e 1 equação para o campo escalar. Da identificação com as equações no espaço quadridimensional obtém-se a expressão do fator de escala,

$$\kappa = \sqrt{\frac{16\pi\epsilon_0 G_{Newton}}{c^2}}. \quad (122)$$

Para que o efeito da quinta dimensão não seja perceptível assume-se a condição cilíndrica, i.e., a métrica não depende da quinta coordenada ou é uma função periódica nessa coordenada,

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^5} = 0 \quad (123)$$

para obter as equações dinâmicas.

Em seguida Oskar Benjamin Klein (1894-1977) considerou aspectos quânticos e o momento na quinta dimensão é identificado com a relação de Luis Victor Pierre Ramon de Broglie (1892-1987).

$$mU_5 = \frac{h}{\lambda_5} \quad (124)$$

Utiliza-se a expressão da equação generalizada da força de Lorentz.



$$m \frac{\partial U_5}{\partial \tau} = q U_a F^{a5} \quad (125)$$

Assume-se que a quinta dimensão é compacta e por isso não é observada. O campo escalar descreve como o tamanho/raio da quinta dimensão varia no espaço. Mostra-se que o raio do círculo da quinta dimensão é muito pequeno,

$$\lambda_5 \sim \frac{h\sqrt{G_{Newton}}}{ce} = \frac{6,62607015 \times 10^{-34} \sqrt{6,6743 \times 10^{-11}}}{299792458 \times 1,602 \times 10^{-19}} = 1,125 \times 10^{-28} m. \quad (126)$$

A partícula de teste deve evoluir na geodésica do espaço tempo de cinco dimensões. Em termos matemáticos o universo é homeomórfico ao produto de um círculo com o espaço quadri-dimensional. Essa proposta não foi levada a sério na época nem pelo próprio criador da teoria da relatividade, Albert Einstein. No entanto, a ideia é a base das teorias modernas de unificação inclusive a teoria das cordas que utiliza 10 dimensões para obter a gravitação quântica.

- Theodor Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., p. 966 (1921).
- Oskar Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Phys., **37**, 895 (1926).
- R. Coquereaux, G. Esposito-Farese, *The theory of Kaluza-Klein-Jordan-Thiry revisited*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **52** (2), 113-150 (1990).
- L. L. Williams, *Field equations and Lagrangian for the Kaluza metric evaluated with tensor algebra software*, Journal of Gravity, 901870 (2015).

### III. AÇÃO E CORDA

#### A. Lagrangiano e Ação

Para o corpo ou sistema com energia cinética,  $\mathcal{E}_c$ , e energia potencial,  $\mathcal{E}_p$ . A evolução no espaço pode ser descrita através do lagrangiano, que é a diferença entre a energia cinética e a energia potencial,

$$L = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p. \quad (127)$$

Define-se a ação como a integral do lagrangiano,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (128)$$

O sistema evolui de maneira a minimizar a ação. Assume-se que o estado inicial e final são conhecidos e fixos. Para todas as trajetórias possíveis entre o estado inicial e o estado final calcula-se o número  $S$  e o sistema evolui na trajetória que oferece o valor extremo para  $S$ , i.e., qualquer pequena variação na trajetória em torno da trajetória que minimiza não muda substancialmente a ação,  $\delta S = 0$ . Esse é o princípio de William Rowan Hamilton (1805-1865).

$$0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left[ \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial t} \delta t \right] dt \quad (129)$$

Ao calcular o valor extremo para a ação para uma variação arbitrária da trajetória obtém-se a equação que descreve a dinâmica do sistema.

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{x}} - \frac{dL}{dx} = 0. \quad (130)$$

A seguir são apresentados alguns exemplos de aplicação.

### B. Partícula clássica

Partícula clássica presa a uma mola.

$$\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m} \quad (131)$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{kx^2}{2} \quad (132)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{x}} = \frac{dp}{dt} \quad (133)$$

$$\frac{dL}{dx} = kx \quad (134)$$

Obtem-se que

$$\frac{dp}{dt} = kx. \quad (135)$$

### C. Carga clássica em campo magnético externo

Para examinar o comportamento da carga clássica em campo magnético externo, escreve-se o lagrangiano,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + J \cdot \vec{A}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + q\dot{r} \cdot \vec{A}(r). \quad (136)$$

Para obter a equação do movimento calcula-se

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{r}} - \frac{dL}{dr} = \frac{d}{dt}(m\dot{r} + q\vec{A}) - q\nabla(\dot{r} \cdot \vec{A}) = 0 \quad (137)$$

$$= m \frac{d}{dt} \dot{r} + q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\dot{r} \cdot \nabla) \vec{A} - q\nabla(\dot{r} \cdot \vec{A}) = 0 \quad (138)$$

Substitui-se a identidade matemática  $\nabla(\dot{r} \cdot \vec{A}) = \dot{r} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \dot{r}) + (\dot{r} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \dot{r}$  e assume-se que  $\dot{r}$  independe da posição para obter a equação da força de Lorentz.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - q\dot{r} \times (\nabla \times \vec{A}) - q\vec{A} \times (\nabla \times \dot{r}) - q(\vec{A} \cdot \nabla) \dot{r} = m \frac{d^2 r}{dt^2} - q\dot{r} \times \vec{B} = 0 \quad (139)$$

em que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  e para  $\vec{B}$  constante  $2\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}$ .

#### D. Partícula livre relativística

Na mecânica relativística considere-se a partícula livre no referencial próprio aquele em que ela está estacionária. No referencial preso à partícula tem-se apenas a energia de repouso, o tempo é o tempo próprio  $\tau$  e a energia de repouso é a energia potencial,  $\mathcal{E}_p = mc^2$ .

$$L = -mc^2 \quad (140)$$

A maneira alternativa de examinar esse problema é observar que todos os observadores do tipo Lorentz obtêm a mesma grandeza  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2$ . A grandeza  $ds$  é um invariante pela transformação de Lorentz, conhecida como escalar de Lorentz. A ação que resulta na geodésica que minimiza o movimento deve ser proporcional a esse escalar,

$$S = \alpha \int ds. \quad (141)$$

Para que o limite não-relativístico seja correto, faz-se  $\alpha = -mc$ . Escreve-se a ação da partícula relativística livre,

$$\boxed{S = -mc \int ds = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (-mc^2) d\tau} \quad (142)$$

que é o resultado obtido anteriormente.

Para mostrar que esse resultado apresenta o limite correto em baixas energias examina-se a energia da partícula relativística,

$$\mathcal{E} = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \gamma mc^2 \quad (143)$$

De acordo com a teoria da relatividade especial ou restrita,

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 \implies cd\tau = dt(c^2 - v^2)^{1/2} = \gamma^{-1} cdt \quad (144)$$

em que  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ .

Para obter a energia cinética deve-se subtrair a energia de repouso,

$$\mathcal{E}_c = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \quad (145)$$

Note-se que em baixas energias,  $v \ll c$ ,

$$\mathcal{E}_c \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1\right) mc^2 = \frac{1}{2} mv^2 \quad (146)$$

como esperado.

De volta para o lagrangiano e a ação,

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (-mc^2) \frac{1}{\gamma} dt = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (-mc^2) \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad (147)$$

Usa-se que  $\frac{dx^\mu}{dt} = (c, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt})$  e a definição do produto interno em quatro dimensões para generalizar,

$$S = \int -mc \sqrt{\frac{dx^\mu}{dt} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dt}} dt. \quad (148)$$

Esse resultado pode ser generalizado ainda mais para a condição em que o espaço é curvo. Embora o fato de conter a raiz quadrada dificulte o processo de quantização. Por isso na teoria quântica utiliza-se outro modelo de lagrangiano.

### E. Partícula relativística no espaço curvo

Na definição clássica da ação, o tempo assume um papel privilegiado o que não é adequado. Na teoria da relatividade todas as coordenadas devem ser tratadas de maneira igual. Para obter essa equivalência, reescreve-se a ação em termos da densidade de lagrangiano,  $\mathcal{L}$ , no espaço-tempo.

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} dV = \int \mathcal{L} \det\{J\} d^4x \quad (149)$$

em que  $J$  é a matriz jacobiana.

Como foi mencionado a matriz  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo plano. Para indicar a métrica do espaço-tempo curvo utiliza-se o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Assume-se que o tensor métrico é o mesmo em todo o Universo. Pode-se escrever o tensor métrico em termos da matriz jacobiana em quatro dimensões,

$$g_{\mu\nu} = J_\mu^\gamma \eta_{\gamma\lambda} J_\nu^\lambda. \quad (150)$$

No espaço quadridimensional o determinante do tensor métrico é negativo,

$$\det\{g_{\mu\nu}\} = -\det\{J\}^2 \quad (151)$$

Define-se,

$$-g \equiv \det\{g_{\mu\nu}\}. \quad (152)$$

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x \quad (153)$$

Assume-se que a densidade de lagrangiano é fixa nos extremos do volume quadridimensional. Assim ao minimizar a ação obtém-se as equações que descrevem a dinâmica do sistema em termos da densidade de lagrangiano.

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu x^\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (154)$$

A teoria da relatividade é inspirada na teoria da elasticidade em que o espaço-tempo é deformado pela presença da massa. A deformação ou curvatura do espaço-tempo é resultado da tensão causada pela massa gravitacional. A energia está contida na deformação do espaço-tempo. Na ação de Albert Einstein (1879-1955) e David Hilbert utiliza-se o escalar

de Ricci,  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  em que  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de curvatura de Ricci para obter as equações dinâmicas da relatividade geral que descrevem a dinâmica do sistema.

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (155)$$

em que  $\kappa = 8\pi G_{Newton}/c^4$  é a constante gravitacional.

Aplica-se o princípio da mínima ação relativística obtém-se as equações de campo de Albert Einstein.

$$0 = \delta S = \int \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g}) d^4x \quad (156)$$

$$= \int [R\delta(\sqrt{-g}) + \delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g}] d^4x \quad (157)$$

Usa-se que  $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})$ .

$$\delta S = \int \left[ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} \right] \delta(g^{\mu\nu})\sqrt{-g} d^4x + \int g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g} d^4x \quad (158)$$

O segundo termo pode ser transformado em um termo de superfície que é nulo pois assume-se que a superfície é estacionária. Como  $\delta(g^{\mu\nu})$  é arbitrária obtém-se as equações de campo de Albert Einstein no vácuo.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (159)$$

Para incluir a matéria acrescenta-se o termo  $\mathcal{L}_m$  à densidade de lagrangiano. Esse termo está associado à densidade de energia da matéria,

$$\mathcal{S} = \int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_m) \sqrt{-g} d^4x \quad (160)$$

De maneira que, define-se

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial(\partial g^{\mu\nu}/\partial x^\gamma)} \right] \quad (161)$$

Na presença de matéria e ao incluir a constante cosmológica,  $\Lambda$ , obtém-se,

$$\boxed{R_{\mu\nu} + \left( \Lambda - \frac{1}{2}R \right) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}} \quad (162)$$

em que  $\kappa = 8\pi G_{Newton}/c^4 = 2,077 \times 10^{-43} N^{-1}$  e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-tensão.

$$T_{\mu\nu} = T^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \quad (163)$$

em que  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ .

$$T^{00} \longrightarrow \text{Densidade de energia} \quad (164)$$

$$T^{0i} \longrightarrow \text{Densidade de momento} \quad (165)$$

$$T^{i0} \longrightarrow \text{Fluxo de energia} \quad (166)$$

$$T^{ii} \longrightarrow \text{Pressão} \quad (167)$$

$$T^{ij} \longrightarrow \text{Tensão de cisalhamento} \quad (168)$$

Para que a energia não-gravitacional seja conservada,

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (169)$$

Ação de Einstein-Hilbert com a constante cosmológica pode ser escrita,

$$S_{EH} = \int \mathcal{L} dx^4 \quad (170)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) \quad (171)$$

em que  $\kappa = 8\pi G_{Newton}/c^4$ .

A constante cosmológica foi introduzida à mão para possibilitar que o Universo fosse estável. Com os indícios experimentais que o Universo está em expansão, Albert Einstein disse: “*that was the biggest blunder of my life*”. Atualmente a constante cosmológica é utilizada para representar a matéria escura do Universo. Cerca de 23% da massa do Universo é classificada como matéria escura e cerca de 73% é classificada como energia escura e 1% é formada por estrelas e neutrinos. O restante é composto por gás de hidrogênio e hélio.

## 1. Solução de Friedmann e LeMaitre

A equação de campo de Albert Einstein foi resolvida por Alexander Alexandrovich Friedmann (1888-1925) e por Georges Henri Joseph Édouard Lemaitre (1894-1966) para o Universo isotrópico e homogêneo descrito pela métrica,

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\sigma^2 \quad (172)$$

em que  $d\sigma^2 = \frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2$  e  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ .

Pode-se calcular o tensor de Ricci para essa métrica.

- Em coordenadas cartesianas:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (173)$$

$$R_{ii} = \frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \quad (174)$$

$$R = \frac{6}{c^2 a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2) \quad (175)$$

- Em coordenadas esféricas:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (176)$$

$$R_{rr} = \frac{\frac{1}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2k}{1 - kr^2} \quad (177)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2 \left( \frac{1}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2k \right) \quad (178)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \left( \frac{1}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2k \right) \quad (179)$$

$$R = \frac{6}{c^2 a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + kc^2) \quad (180)$$

Considere-se a equação de campo de Einstein para o Universo isotrópico e homogêneo,

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (181)$$

Para  $\mu = \nu = 0$ ,  $g^{00} = -\frac{1}{c^2}$  e  $g_{00} = -c^2$

$$R_{00} + \left( \Lambda - \frac{1}{2}R \right) g_{00} = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4} T_{00} \quad (182)$$

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \left( \Lambda - 3 \left( \frac{\ddot{a}}{c^2 a} + \frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right) (-c^2) = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4} \rho c^4 \quad (183)$$

$$\left( \Lambda - 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right) (-c^2) = 8\pi G_{Newton} \rho \quad (184)$$

Obtem-se a primeira equação de Alexander Friedmann,

$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G_{Newton}}{3} \rho} \quad (185)$$

A partir dessa equação observa-se que a constante cosmológica pode ser considerada uma correção para a densidade do Universo.

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G_{Newton}}{3} \left( \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G_{Newton}} \right) = \frac{8\pi G_{Newton}}{3} \rho' \quad (186)$$

Calcula-se o traço da equação de campo,  $\text{Tr}\{T_{\mu\nu}\} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ ,

$$R + \left( \Lambda - \frac{1}{2}R \right) \text{Tr}\{g_{\mu\nu}\} = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4} (\rho c^2 - 3p)c^2 \quad (187)$$

$$R + \left(\Lambda - \frac{1}{2}R\right)(3 - c^2) = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4}(\rho c^2 - 3p)c^2 \quad (188)$$

$$6 \left( \frac{\ddot{a}}{c^2 a} + \frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{k}{a^2} \right) + \left(\Lambda - \frac{1}{2}R\right)(3 - c^2) = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4}(\rho c^2 - 3p)c^2 \quad (189)$$

Obtem-se a segunda equação de Alexander Friedmann,

$$\boxed{2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G_{Newton}}{c^2}p} \quad (190)$$

Define-se o parâmetro de densidade,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad (191)$$

em que  $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G_{Newton}}$  e  $H$  é o parâmetro de Hubble.

$$\Omega < 1 \longrightarrow \text{Universo aberto} \quad (192)$$

$$\Omega = 1 \longrightarrow \text{Universo plano} \quad (193)$$

$$\Omega > 1 \longrightarrow \text{Universo fechado} \quad (194)$$

A solução dessas equações resulta em modelo para a expansão do Universo e na proposta do grande pipôco primordial (*Big Bang*). Expressão criada por Fred Hoyle (1915-2001) em tom de menosprezo.

## F. Ondas gravitacionais

Pode-se obter solução oscilatórias para as equações de campo que viajam na velocidade da luz. Essas soluções são conhecidas como **ondas gravitacionais**. Elas foram aparentemente detectadas em 2015 produzidas pela colisão de dois buracos negros pela técnica de interferometria a LASER, LIGO - *Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory*. Embora ainda existam dúvidas sobre esse resultado. A primeira evidência foi apresentada por Russel Hulse em 1974 ao considerar o movimento de um par de estrelas de neutrons.

- B. P. Abbott et al. *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, Phys. Rev. Letters, **116**, 061102 (2016).
- Andrzej Królak, Mandar Patil, *The first detection of gravitational waves*, arXiv:1708.00918 (2017).
- Michael Brooks, *Exclusive: grave doubts over LIGO's discovery of gravitational waves*, New Scientist (2018).

## G. Campo eletromagnético

As equações de Maxwell podem ser obtidas a partir da densidade de lagrangiano para o campo eletromagnético.



$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_o} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (195)$$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (196)$$

Obtem-se

$$-\frac{1}{\mu_o} \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + j^\nu = 0 \quad (197)$$

O que resulta na equação de Maxwell.

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_o j^\nu} \quad (198)$$

## H. Carga relativística e o campo eletromagnético

Considere-se a densidade de lagrangiano e ação da carga relativística no campo eletromagnético no espaço plano. Para a carga relativística a densidade de Lagrangiano depende apenas de termos em  $\partial_0 x_\nu = c^{-1} \partial x_\nu / \partial \tau$ . De maneira que o lagrangiano consiste do termo associado à partícula, o termo associado à interação entre a partícula e o campo eletromagnético e o termo associado ao campo eletromagnético,

$$S = \int L d\tau = \int \left( -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} - \int j^\mu A_\mu d^3x - \frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^3x \right) d\tau \quad (199)$$

em que  $j^\mu = (c\rho, \vec{J})$ ,  $A^\nu = (\phi/c, \vec{A})$  e  $j^\mu A_\mu = j^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu = \rho\phi - \vec{J} \cdot \vec{A}$ .

Para a carga no espaço a densidade de corrente é proporcional à velocidade,

$$\int j^\mu A_\mu d^3x = qU^\mu A_\mu. \quad (200)$$

em que  $\rho = q\delta(\vec{r})$ ,  $U^\nu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$ ,  $U_\nu = \eta_{\nu\mu} U^\mu = \gamma(c, -v_x, -v_y, -v_z)$  e  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

$$\frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 x^\nu)} \right) = m \frac{dU^\nu}{d\tau} + q \frac{dA_\nu}{d\tau} \quad (201)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} = qU^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (202)$$

Então pode-se obter a expressão da equação que descreve a dinâmica.

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial U^\nu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = m \frac{dU^\nu}{d\tau} + q \frac{dA_\nu}{d\tau} - qU^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = 0 \quad (203)$$

$$m \frac{dU^\nu}{d\tau} = qU^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - q \frac{dA_\nu}{d\tau} = qU^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - qU^\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = qU^\mu F_{\mu\nu} \quad (204)$$

Ao aplicar o princípio da mínima ação obtém-se a equação da força de Lorentz.

$$\boxed{\frac{dp^\nu}{d\tau} = qU^\mu F_{\mu\nu} \longrightarrow \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}} \quad (205)$$

### I. Kaluza-Klein

A métrica na teoria de Kaluza-Klein é definida pela matriz simétrica  $\gamma_{ab}$ ,  $5 \times 5$ . De maneira que o elemento de distância pode ser escrito,

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2\gamma_{\mu 5} dx^\mu dx^5 + \gamma_{55} dx^5 dx^5 \quad (206)$$

A densidade de lagrangiano pode ser escrita de maneira semelhante ao lagrangiano de Einstein-Hilbert em termos do tensor de curvatura de Ricci,  $R_{KK}$ , em cinco dimensões (Equação 155).

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{16\pi G_{KK}} R_{KK} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G_{KK} e^{-\sigma}} \left( R - \frac{\kappa^2}{4} e^{2\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2e^{-\sigma} \square e^\sigma \right) \quad (207)$$

em que  $\gamma = \det\{\gamma_{ab}\}$ ,  $G_{KK}$  é o equivalente da constante gravitacional e  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  é o d'Alambertiano.

Essa densidade de lagrangiano descreve o acoplamento entre gravitação e eletromagnetismo. Ao minimizar a ação obtém-se 15 equações:

- 10 equações modificadas de Einstein.
- 4 equações modificadas de Maxwell.
- 1 equação para o campo escalar.

Para confirmar experimentalmente essa teoria deve-se examinar o acoplamento do campo escalar  $\sigma$  com o espaço-tempo da gravitação. Esse campo escalar está relacionado com o tamanho da quinta dimensão. Esse tipo de investigação também é importante na teoria da corda que faz uso da ideia de dimensões extras.

- R. Coquereaux, G. Esposito-Farese, *The theory of Kaluza-Klein-Jordan-Thiry revisited*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **52** (2), 113-150 (1990).

### J. Corda relativística

Considere-se dois entes de massa  $m = M/2$  acoplados e que giram com velocidade relativística em torno do centro de massa. Esse sistema pode ser um modelo para o méson de massa  $M$  que é composto de dois quarks fortemente ligados. O momento da partícula no referencial do centro de massa,

$$p = (\mathcal{E}/c, \vec{p}) \longrightarrow p^\mu p_\mu = \mathcal{E}^2/c^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 c^4 \quad (208)$$

Para velocidade da ordem da velocidade da luz,

$$|\vec{p}|c = mc \frac{dX}{d\tau} = mc \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\vec{U}}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} mc \gg mc^2. \quad (209)$$

Define-se  $s$  como o quadrado da energia no sistema de referência do centro de massa.

$$s = \mathcal{E}^2 = (2M/2)^2 c^4 + (2|\vec{p}|)^2 c^2 = M^2 c^4 + (2|\vec{p}|)^2 c^2 \approx (2|\vec{p}|c)^2 \implies 2|\vec{p}| = \frac{\sqrt{s}}{c} \quad (210)$$

A distância entre cada ente relativístico e o centro de massa é dada por  $r$ . Calcula-se o momento angular do conjunto de entes relativísticos que giram em torno do centro de massa.

$$J = |\vec{p}|r + |\vec{p}|r = 2|\vec{p}|r \implies r = \frac{J}{2|\vec{p}|} = \frac{cJ}{\sqrt{s}} \quad (211)$$

A força centrípeta.

$$F_c \approx \frac{|\vec{p}|c}{r} = \frac{c\frac{\sqrt{s}}{2c}}{\frac{cJ}{\sqrt{s}}} = \frac{s}{2cJ} \quad (212)$$

Experimentalmente observa-se que a amplitude do espalhamento é uma função do momento angular, denominado de trajetória de Regge,  $J = \alpha(s) = \alpha's + \alpha(0)$  em que  $\alpha' = 1 \text{ GeV}^{-2}$  e despreza-se  $\alpha(0)$ .

$$F_c = \frac{s}{2c\alpha's} = \frac{1}{2\alpha'c} \quad (213)$$

Obtem-se que a força é constante. Como a força é o gradiente da energia potencial, a energia potencial aumenta linearmente com a separação.

## 1. Modelo de vórtice

Um modelo mais adequado considera a energia do campo de força, i.e., a energia da conexão. Nesse modelo a conexão entre as duas partículas é via um tubo fino ou vórtice. O tubo transporta toda a energia de interação como uma corda de comprimento  $2r$  que conecta os dois quarks que compõem o méson. A força da interação é o gradiente da energia ao longo do tubo ou vórtice.

$$|F| = \left| -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \right| \quad (214)$$

Assume-se que o tubo ou vórtice transporta energia por unidade de comprimento,  $T$ , e despreza-se a contribuição das partículas para a energia. A energia por unidade de comprimento,  $T$ , é a tensão no vórtice ou “corda”. Assume-se ainda que as extremidades do tubo ou “corda” gira com velocidade próxima da velocidade da luz, i.e., tem-se uma “corda” que gira com velocidade angular relativística. De maneira que a velocidade em um ponto  $x$  ao longo do tubo a partir do centro de massa pode ser aproximado,

$$v(x) = \frac{c}{r}x. \quad (215)$$

A energia total

$$\mathcal{E} = \int_{-r}^r \gamma T dx = \int_{-r}^r \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dx. \quad (216)$$

Faz-se a mudança de variável  $x' = x/r = \text{sen}\theta$ .

$$\mathcal{E} = rT \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x'^2}} dx' = 2rT \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x'^2}} dx' = 2rT \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi rT \quad (217)$$

Momento angular.

$$J = \int_{-r}^r p(x)xdx = \int_{-r}^r \gamma\beta x \frac{d\mathcal{E}}{c} = \int_{-r}^r \frac{Tvx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dx = \frac{\pi}{2c} r^2 T \quad (218)$$

Divide-se o quadrado da energia pelo momento angular para obter a tensão na corda. Usa-se a observação experimental da trajetória de Regge,  $J = \alpha(s) = \alpha's + \alpha(0)$  em que  $\alpha' = 1 \text{ GeV}^{-2}$  e despreza-se  $\alpha(0)$ .

$$\boxed{\frac{\mathcal{E}^2}{J} = 2\pi cT \implies T = \frac{\mathcal{E}^2}{2\pi cJ} = \frac{s}{2\pi c\alpha's} = \frac{1}{2\pi c\alpha'} = \frac{F_c}{\pi}} \quad (219)$$

## 2. Ação relativística da corda clássica

Para obter a ação relativística para a corda livre considere-se a densidade de energia para obter o lagrangiano.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dl} = \frac{T}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (220)$$

$$\mathcal{E}_p = \int \frac{T}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dl \quad (221)$$

$$\mathcal{E}_c = \int \frac{Tv^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dl \quad (222)$$

$$L = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p \quad (223)$$

$$= - \int T \frac{1-v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dl \quad (224)$$

$$= - \int T \sqrt{1-v^2/c^2} dl \quad (225)$$

$$= - \int \frac{1}{\gamma} T dl \quad (226)$$

Agora pode-se avaliar a ação.

$$S = - \int \int \frac{1}{\gamma} T dl dt = - \int \int T dl d\tau \quad (227)$$

$$\boxed{S = - \int \int T dA} \quad (228)$$

Na teoria tradicional a partícula é “pontual”, i.e., tem apenas o tempo como parâmetro, e ao evoluir pelo espaço-tempo traça uma trajetória do tipo linha ou linha-existencial (*world-line*), como ilustrado na Figura 1a. A corda relativística é uma linha e ao evoluir pelo espaço-tempo traça a superfície-existencial (*world-sheet*), como ilustrado na Figura 1b. O

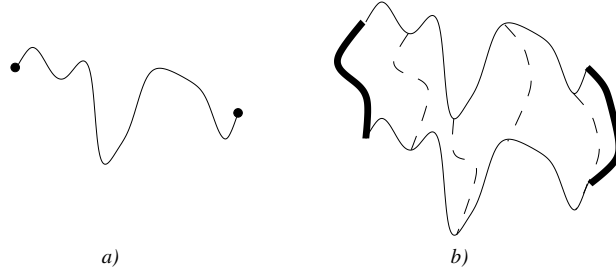


FIG. 1. Trajetórias. a) linha-existencial. b) Superfície-existencial.

elemento  $dld\tau$  é o elemento de área na superfície-existencial. É mais comum utilizar a letra  $\sigma$  para indicar a posição na corda. Assim, a evolução é parametrizada por  $\tau$  e  $\sigma$ .

Para o caso mais geral em que se tem uma membrana no espaço de dimensão  $D > p + 1$ , ela é denominada de  $p$ -brana. A membrana no espaço tridimensional é uma 2-brana. Ao propagar a  $p$ -brana gera-se o volume existencial com  $p + 1$  dimensões no espaço de  $D$  dimensões em que  $p < D$ . De maneira que a ação associada à  $p$ -brana,

$$S_p = - \left( \frac{\mathcal{E}_p}{V_p} \right) \int d\mu_p \quad (229)$$

em que  $V_p$  é o volume generalizado da  $p$ -brana e a razão energia por unidade de volume é denominada de tensão generalizada.

$$d\mu_p = \sqrt{\det\{G_{\alpha\beta}\}} d^{(p+1)}\sigma \quad (230)$$

em que  $G_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu$  e  $\alpha, \beta = 0, \dots, p$ .

O grande desafio é introduzir a quantização da  $p$ -brana.

- Edmund Bertschinge, *Symmetry transformations, the Einstein-Hilbert action, and gauge invariance*, Physics 8.962, Massachusetts Institute of Technology, 26pp (2002).
- Ian D. Lawrie, *A unified grand tour of theoretical physics*, 2ª Ed., Institute of Physics Publishing, Bristol (2002).
- Gerard 't Hooft, *Introduction to string theory*, Lecture notes 2003 and 2004, Institute for Theoretical Physics, Utrecht, the Netherlands, 79 páginas (2004).

#### IV. TEORIA QUÂNTICA

No início da construção da teoria quântica apenas a energia da matéria era quantizada, representada pela quantização da energia do elétron. A interação era tratada classicamente. A teoria quântica antiga apresenta diversas limitações:

- Energia não-relativística.
- O tempo é tratado de maneira separada do espaço.
- A função de onda é eterna, não pode ser criada ou destruída.
- A quantidade de partículas é constante, i.e., o sistema é fechado.
- Não explica o *spin*.

- Como a energia é definida, a incerteza no tempo é infinita, não se poderia mudar de estado.
- Em aplicações reais é difícil conhecer o estado inicial.
- Como incluir o processo de medição.
- O estado quântico define o sistema em todo o Universo.
- A interação é clássica.

Como a quantização da energia do fóton, que representa a interação, também já era conhecida, em seguida foi desenvolvida a teoria da quantização combinada da energia da matéria e da energia da interação. Esse desenvolvimento é conhecido como **segunda quantização**. Combinado a isso tem descoberto por Paul Dirac da equação quântica relativística e sua interpretação da solução dessa equação como o campo de matéria. Isso resultou no surgimento da teoria do campo quântico ou teoria quântica do campo. Assim chega-se a unificação entre a teoria quântica e a eletrodinâmica que ficou conhecida como **eletrodinâmica quântica**. Essa é a teoria mais exata conhecida do ponto de vista de fornecer valores experimentalmente comprovados. Sua construção serviu de inspiração para a elaboração de outra grande unificação: a **teoria eletrofraca**. Também serve de base para a **cromodinâmica quântica**. Finalmente na elaboração do **modelo padrão**. Tudo isso embutido na fase do campo quântico.

De acordo com a interpretação de Max Born a densidade de probabilidade de encontrar a partícula está relacionada com o quadrado do módulo da função de onda. Nesse contexto, a fase da função de onda parece não ter grande relevância. Assim, funções de onda cuja única diferença é a fase,

$$\Psi(r) \quad \text{e} \quad \Psi'(r) = \Psi(r)e^{i\theta(r)} \quad (231)$$

representariam o mesmo fenômeno.

$$\mathcal{P}(r) = |\Psi'(r)|^2 = \Psi'^*(r)\Psi'(r) = \left(\Psi(r)e^{i\theta(r)}\right)^* \Psi(r)e^{i\theta(r)} = |\Psi(r)|^2 \quad (232)$$

Calcule-se a derivada para avaliar o operador momento linear.

$$\frac{\partial\Psi'(r)}{\partial r} = \frac{\partial\Psi(r)}{\partial r}e^{i\theta(r)} + i\Psi(r)e^{i\theta(r)}\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} \quad (233)$$

$$\frac{\partial\Psi'(r)}{\partial r} - i\Psi'(r)\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} = \frac{\partial\Psi(r)}{\partial r}e^{i\theta(r)} \quad (234)$$

Para a fase dependente da posição é necessário redefinir o operador momento linear,  $\hat{p}$ , para que representem o mesmo fenômeno.

$$\hat{p}' = -i\hbar\frac{D}{Dr} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial\theta(r)}{\partial r}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r} - \hbar\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} = \hat{p} - \hbar\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} \quad (235)$$

Com essa definição o operador energia que é proporcional à  $\hat{p}^\dagger\hat{p}$  não é afetado pela fase,

$$\frac{D\Psi'(r)}{Dr} = e^{i\theta(r)}\frac{D\Psi(r)}{Dr} \quad (236)$$

Pode-se reescrever a relação entre as duas funções de onda e os dois momentos lineares com a transformação unitária,  $U(1) = e^{i\theta(r)}$ . Note-se que  $U(1)$  é o conjunto de todos os números complexos com norma (módulo) igual a unidade.

$$\Psi'(r) = U(1)\Psi(r) \quad (237)$$

$$\frac{D\Psi'(r)}{Dr} = U(1)\frac{D\Psi(r)}{Dr} \quad (238)$$

Note-se que essa transformação unitária apresenta apenas um grau de liberdade interno, i.e., é representado por um número apenas, e está associada a uma partícula de interação, o fóton.

No eletromagnetismo também existe a possibilidade de múltiplos potenciais resultarem na mesma descrição do fenômeno. Essa multiplicidade aparece na representação do campo pelo potencial.

$$\vec{E} = -\nabla \left( V - \frac{\partial\chi}{\partial t} \right) - \frac{\partial(\vec{A} + \nabla\chi)}{\partial t} \quad (239)$$

$$\vec{B} = -\nabla \times (\vec{A} + \nabla\chi) \quad (240)$$

em que  $\nabla \times \nabla\chi = 0$  é uma identidade matemática.

De acordo com o lagrangiano da partícula na presença de campo magnético na Equação 139 o momento linear,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} - eA. \quad (241)$$

Essa equação pode ser estendida,

$$p = m\dot{r} - eA - e\nabla\chi \quad (242)$$

Ao se comparar com a equação quântica conclui-se que a função  $\chi$  está relacionada com a fase da função de onda.

$$e\chi = \hbar\theta(r) \quad (243)$$

Para o caso particular em que

$$\vec{A} = \nabla\eta \quad (244)$$

Obtem-se que o vetor potencial modifica a fase da função de onda mesmo que o campo magnético seja nulo ( $\nabla \times \vec{A} = \nabla \times \nabla\eta = 0$ ).

$$\Psi(r)e^{i\frac{e}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{r}} \quad (245)$$

A variação da fase da função de onda em termos do vetor potencial é observado experimentalmente e é conhecido como efeito Aharonov-Bohm. A consequência disso é que a aparente incerteza da fase está associada à interação. No caso eletromagnético a fase é um número dentro do conjunto de elementos do círculo unitário. Acrescenta-se um operador com as propriedades de fechamento, elemento neutro e inverso e tem-se um grupo matemático ou grupo de Lie, conhecido como grupo de simetria  $U(1)$  em que  $U$  significa unitário. Assim é criada a eletrodinâmica quântica.

**A fase da função de onda está relacionada com o processo de interação.**

### A. Equação de Dirac

Para descrever a teoria quântica dentro do formalismo relativístico Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), que era formado em engenharia elétrica, elaborou uma nova equação para descrever o comportamento do elétron. Ele fez a proposta brilhante de escrever uma equação de primeira ordem cujo quadrado é a energia relativística.

$$\left( \gamma_0 m c^2 + \sum_{k=1}^3 \gamma_k p_k c \right) \Psi_D(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi_D(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (246)$$

em que  $\gamma_k$  são matrizes de ordem 4 que podem ser escritas em termos das matrizes de Pauli.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (247)$$

Ao elevar esse equação ao quadrado obtem-se a energia relativística,

$$m^2 c^4 + p^2 c^2 = \mathcal{E}^2. \quad (248)$$

Pode-se escrever a equação na notação da teoria da relatividade.

$$\boxed{i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_D - mc \Psi_D = 0} \quad (249)$$

A solução da equação de Schrödinger é uma função unidimensional denominada *função de onda*, i.e., ao escolher uma posição no espaço-tempo obtem-se um número, enquanto a solução da equação de Dirac é uma função quadridimensional denominada **spinor**, i.e., ao escolher uma posição no espaço-tempo obtem-se um quadri vetor.

$$\begin{aligned} \text{Solução de Schrödinger} &\rightarrow \Psi_S(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Solução de Dirac} &\rightarrow \Psi_D(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \end{aligned} \quad (250)$$

Ao introduzir a teoria da relatividade na mecânica quântica obtem-se *spin*. O spinor é escrito na notação de Dirac com colchetes  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

$$\Psi_D(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \equiv \langle \vec{r}, t | \Psi_D \rangle \quad (251)$$

Considere-se o quadrado do momento com a inclusão do quadripotencial,

$$(\hat{p}^\dagger + eA^\dagger)(\hat{p} + eA) = \hat{p}^\dagger \hat{p} + (A^\dagger \hat{j} + \hat{j}^\dagger A) + e^2 A^\dagger A \quad (252)$$

em que o primeiro termo é a auto-energia da partícula, os dois termos do meio é a energia da interação e o quarto termo é a auto-energia da interação.

Uma dificuldade que havia sido encontrada por Erwin Schrödinger ao tentar obter a equação relativística era a questão das energias negativas.

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (253)$$



Isso foi resolvido de maneira espetacular por Paul Dirac que sugeriu a existência de anti-partículas, o que foi posteriormente confirmado. Para o elétron, tem-se o pósitron. Essa foi a primeira vez que uma partícula foi prevista matematicamente. Na interpretação de Paul Dirac os estados de energia negativa estariam todos preenchidos. Essa sugestão é para evitar que o elétron ao buscar o estado de menor energia, caia no estado de energia negativa infinita. A anti-partícula seria o equivalente à lacuna de energia ao promover o ente quântico do estado de energia negativa para o estado de energia positiva.

$$\begin{aligned} \text{Energia da lacuna} &= -\mathcal{E}_{neg} \rightarrow \text{Energia positiva} \\ \text{Carga da lacuna} &= -q_{neg} \rightarrow \text{Carga positiva} \end{aligned} \quad (254)$$

Essa interpretação foi utilizada por William Bradford Shockley Jr. (1910 - 1989) para explicar a lacuna como portador de carga no semiconductor. No entanto, essa interpretação causa problemas quando se tenta estender a teoria quântica do campo para os entes quânticos do tipo bóson, como o fóton, que não está sujeito ao princípio de exclusão de Wolfgang Ernst Pauli (1900 - 1958). Enquanto cada estado quântico de férmion só pode conter apenas um férmion, estado quântico de bóson pode conter infinita quantidade de bósons. Assim, uma nova interpretação era necessária, que foi proposta do Richard Feynmann. As soluções com energia negativa é equivalente a soluções com quadrimomento ( $p = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$ ) negativo. Essas soluções é que devem ser utilizadas para representar a anti-partícula.

$$-|q|(\mathcal{E}/c, \vec{p}) \longrightarrow |q|(-\mathcal{E}/c, -\vec{p}) \quad (255)$$

A energia negativa equivale á partícula com quadrimomento negativo. A emissão de uma antipartícula com quadrimomento  $p^\mu$  é equivalente fisicamente à absorção de uma partícula com quadrimomento  $-p^\mu$  e vice-versa.

Outro aspecto é a energia do vácuo que se manifesta experimentalmente através do efeito descoberto por Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000).

De acordo com a teoria quântica da primeira metade do século XX é mais conveniente descrever o ente quântico com o formalismo do lagrangiano. Para construir a teoria quântica passa-se do lagrangiano para a densidade do lagrangiano para que todas as dimensões recebam o mesmo tratamento.

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x \quad (256)$$

em que  $\mathcal{L}$  é a densidade de lagrangiano.

Para obter a dinâmica do campo quântico avalia-se a ação.

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \left[ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - mc^2)\psi \right] d^4x \quad (257)$$

em que  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  e  $D_\mu = \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar} A_\mu + i\frac{e}{\hbar} B_\mu$ .

Note-se que

- Equação dinâmica da matéria.

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \quad (258)$$

- Equação dinâmica da interação.

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 \quad (259)$$

Posteriormente nessa teoria  $\Psi$  deixa de ser uma função e passa a ser o campo quântico,  $|\Psi_D\rangle$ , que pode operar sobre o espaço-tempo  $(\vec{r}, t)$  para obter o spinor. Com essa interpretação nasce a teoria do campo quântico.

A interação está contida na fase da função de onda de maneira que de acordo com Paul A. M. Dirac, a incerteza na fase por um múltiplo de  $2\pi$  pode ser traduzido no monopolo magnético o que pode explicar a quantização da carga elétrica.

$$q_e q_m = 2\pi \hbar \epsilon_0 c^2 \implies q_m = 3,3 \times 10^{-9} \quad (260)$$

- Paul A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. R. Soc. Lond. A 133, 60-72 (1931).
- Ian J. R. Aitchison, Anthony J. G. Hey, *Gauge theories in particle physics - a practical introduction*. Volume 1 (3rd ed.), IOP Publishing, Bristol (2003).

## B. Modelo padrão

A experiência de Ernest Rutherford (1871-1937) demonstrou a existência do núcleo. Com isso surge a questão da estabilidade do núcleo que seria composto de cargas positivas que deveriam repelir umas outras. Posteriormente foi necessário incluir o neutron que não apresenta carga elétrica. Para garantir a estabilidade foi proposto a força nuclear que seria de curto alcance. Matematicamente, isso significa que a partícula portadora da interação teria que possuir massa. Atualmente, sabe-se que há dois tipos de unidades de matéria: quarks e léptons. Os componentes do núcleo são formados por quarks e os elétrons em torno dele são léptons. Também se sabe que existem quatro forças fundamentais:

- Força gravitacional.
- Força eletromagnética.
- Força fraca.
- Força forte.

Assim busca-se um arcabouço teórico que possa descrever as unidades de matéria e suas interações. Note-se que as unidades elementares de matéria apresentam *spin* fracionário,  $\hbar/2$ , e obedecem a estatística de Fermi-Dirac. Por isso são denominados de fermiônicos. Os léptons que é a generalização do elétron interagem através da força fraca e se tiverem carga também interagem através da força eletromagnética. Os quarks podem interagir através da força forte, força fraca e força eletromagnética. Todos com massa interagem através da força gravitacional.

Dessa maneira  $\Psi$  da teoria de tudo passa a ter  $N > 4$  dimensões como inicialmente proposto na teoria de Kaluza-Klein e a transformação unitária do eletromagnetismo,  $U(1)$ , é generalizada. De maneira que tem-se as matrizes geradoras  $\lambda_k$  no argumento. Essas matrizes formam **grupos de Lie**.

$$U(\theta) = 1 + i \sum_{k=1}^D \theta_k \lambda_k \approx e^{i \sum_{k=1}^D \theta_k \lambda_k} \quad (261)$$

em que  $\theta_k$  é infinitesimal,  $\lambda_k$  são os geradores do grupo de transformações e  $D$  é a dimensão do grupo de transformações.

A interação fraca faz uso do mecanismo da escolha local da fase, mas utiliza matrizes para representar a base da transformação da fase. Para essa interação  $\lambda_k \in SU(2)$  em que  $SU$  significa unitário especial, i.e.,  $SU(2)$  é o conjunto de matrizes  $2 \times 2$  unitárias com

determinante igual a um. Uma matriz de números complexos é dita unitária se o conjugado da transposta é igual a inversa.

Na teoria da interação eletrofraca a fase é uma combinação de matrizes do grupo de simetria  $SU(2)$  combinados com  $U(1)$  para obter o grupo de simetria  $SU(2) \otimes U(1)$ . A teoria eletrofraca foi desenvolvida por Sheldon Lee Glashow (1932-), Mohammad Abdus Salam (1926-1996) e Steven Weinberg (1933-2021). Na cromodinâmica quântica que descreve os quarks utiliza-se  $SU(3)$  que é formado por matrizes  $3 \times 3$  com determinante igual a um. No modelo padrão que unifica a teoria eletrofraca e a cromodinâmica quântica utiliza-se  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ . Os grupos matemáticos  $SU(2)$  e  $SU(3)$  não são comutativos e assim são denominados de não-abelianos. A cromodinâmica quântica é o desenvolvimento de muitos, a exemplo de Harald Fritzsch (1943-2022).

$$\Psi'(r) = U(\theta)\Psi(r) \quad (262)$$

$$D_\mu \Psi'(r) = U(\theta)D_\mu \Psi(r) \quad (263)$$

em que  $U(\theta) = e^{i \sum_k \theta_k \lambda_k}$  e  $\lambda_k$  são os geradores do grupo  $SU(2)$  ou  $SU(3)$ .

A quantidade de geradores independentes em  $SU(N)$  é  $N^2 - 1$ . Para  $SU(2)$  são 3 geradores que podem ser escolhidos como as matrizes de Pauli,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . A quantidade de geradores indica a quantidade de partículas de interação. Na interação eletrofraca,  $SU(2) \otimes U(1)$ , tem-se quatro partículas de interação:

- Bósons  $W_1, W_2, W_3$ .
- Bóson  $Z$ .

A quebra espontânea de simetria na interação eletrofraca faz com que os bósons  $W$  e  $Z$  ganhem massa. Este é o mecanismo de Higgs (bóson de Higgs,  $H$ ). O mecanismo de Higgs também é utilizado para dar massa para léptons e quarks. Apenas os neutrinos não ganham massa, o que contradiz o resultado experimental. É necessário que as partículas de interação na teoria da força fraca tenham massa para que a força seja de curto-alcance. Após a quebra de simetria na interação eletrofraca obtém-se:

- Bósons  $W^+$  e  $W^-$ .
- Bóson  $Z^0$ .
- Fóton.

Assim a simetria da interação eletrofraca é quebrada espontaneamente de maneira que essa interação passa a ter um força fraca de curto-alcance e a força eletromagnética de longo alcance.

A cromodinâmica quântica descreve a interação forte com a aplicação do grupo de simetria  $SU(3)$ . Para  $SU(3)$  são 8 geradores que podem ser escolhidos como as matrizes de Murray Gell-Mann (1929-2019).

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (264)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (265)$$

A partícula de interação é denominada de gluon. Com o  $SU(3)$  tem-se 8 gluons. A combinação da interação eletromagnética, interação fraca e interação forte está descrita teoricamente no modelo padrão que utiliza a simetria

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \quad (266)$$

Os  $3^2 - 1 = 8$  graus de liberdade internos de  $SU(3)$  correspondem à força forte e os  $2^2 - 1 = 3$  graus de liberdade internos de  $SU(2)$  correspondem à força fraca e o grau de liberdade internos de  $U(1)$  corresponde à força eletromagnética.

Uma simetria é dita global se não depende do espaço-tempo. Simetria local ou de calibre é dependente do espaço tempo. As leis da Natureza devem ser invariantes por operações de simetria no espaço-tempo (transformações de Poincaré). Tipos de simetria:

- discreta: conjugação de carga  $C$ , paridade  $P$  (inversão espacial) e reversão do tempo,  $T$ .
- contínua: translação, rotação.
  - espaço-tempo: translação, rotação.
  - interna: isospin.

De acordo com o teorema de Amalie Emmy Noether (1882-1935) cada simetria está associada a uma quantidade sendo conservada, seja energia, momento linear, momento angular, carga, quantidade de partículas.

### 1. Quem encomendou essa?

Com a descoberta experimental de tantas partículas subatômicas Isidor Isaac Rabi (1898-1988) teria dito:

**Who ordered that?** (*Quem encomendou essa?*)

Assim buscou-se uma maneira de organizar a selva de partículas observadas experimentalmente. Um modelo de classificação dos hadrons (bárions e mésons) foi proposto por Murray Gell-Mann (1929-2019) que propôs o nome “quark” e de maneira independente por George Zweig (1937-). O objetivo era determinar quais hadrons eram de fato partículas elementares, i.e., se existem partículas mais elementares que formariam a selva de partículas observadas experimentalmente. Obtem-se que seis quarks,

1. *bottom* (b),
2. *charm* (c),
3. *down* (d),
4. *strange* (s),
5. *top* (t),
6. *up* (u),

são suficientes para descrever os bárions conhecidos, como ilustrado na Figura 2. Os diferentes tipos de quarks são denominados de sabores. Os bárions tais como o próton e o neutron são formados por três quarks e se encaixam no modelo com octetos ( $S = 1/2$ ) e decupletos ( $S = 3/2$ ). Os mésons ( $S = 0$  e  $S = 1$ ) são formados por dois quarks e formam noneto. Para cada quark tem-se o anti-quark. A “carga” do quark que produz a força forte tem três polaridades ou cores (*red* :  $r$ , *green* :  $g$ , *blue* :  $b$ ) e outras três polaridades ou anti-cores ( $\bar{r}$ ,  $\bar{g}$ ,  $\bar{b}$ ).

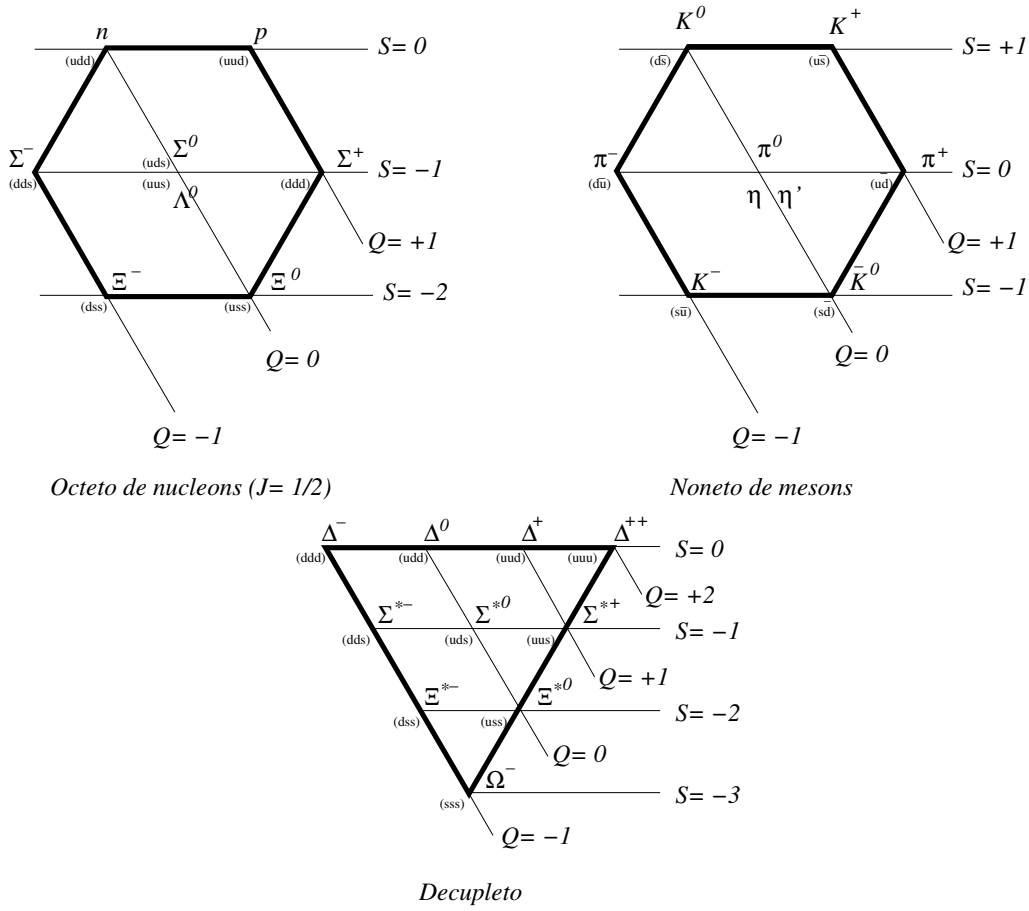


FIG. 2. Modelo de quark para os bárions em que  $Q$  é múltiplo da carga do elétron e  $S$  é a “estranheza”.

- Próton ( $p$ ):  $uud$ .
- Neutron ( $n$ ):  $udd$ .
- Delta mais mais ( $\Delta^{++}$ ):  $uuu$ .
- Delta mais ( $\Delta^+$ ):  $uud$ .
- Delta zero ( $\Delta^0$ ):  $udd$ .
- Delta menos ( $\Delta^-$ ):  $ddd$ .
- Lambda zero ( $\Lambda^0$ ):  $uds$ .
- Lambda charmoso ( $\Lambda^{c+}$ ):  $udc$ .
- Lambda para baixo ( $\Lambda^{b0}$ ):  $udb$ .
- Omega menos ( $\Omega^-$ ):  $sss$ .
- Qi menos ( $\Xi^-$ ):  $sds$ .
- Qi zero ( $\Xi^0$ ):  $sus$ .
- Sigma mais ( $\Sigma^+$ ):  $uus$ .

- Sigma zero ( $\Sigma^0$ ):  $uds$ .
- Méson pi ou pion:  $d\bar{u}$  ( $\pi^-$ ),  $\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$  ( $\pi^0$ ),  $u\bar{d}$  ( $\pi^+$ ).
- Meson kaon:  $\bar{u}s$  ( $K^-$ ),  $d\bar{s}$  ( $K^0$ ),  $u\bar{s}$  ( $K^+$ ).

Com o modelo padrão consegue-se descrever três léptons: elétron,  $e^-$ , muon,  $\mu^-$  e tau,  $\tau^-$ , e os neutrinos correspondentes:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ , assim como seis quarks com os “sabores”:  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$  e  $t$ . O sabor indica os tipos de fonte da força forte enquanto a cor indica o tipo de carga da força forte, assim como a carga elétrica é a origem da força eletromagnética. Enquanto cada quark apresenta o grau de liberdade de cor, as partículas formadas por quarks não apresenta esse grau de liberdade. Tem-se combinações de vermelho, verde e azul nos bárions ou combinações de cor e anticor nos mésons. A carga elétrica do quark corresponde a  $1/3$  da carga do elétron.

A riqueza de combinações é muito maior que a apresentada. Apesar do grande sucesso, é importante salientar que esse modelo não inclui a força gravitacional. Não explica a quantização da carga ou os valores para as massas das partículas o que inclui a massa do neutrino. Além de diversas outras limitações. Seguindo a estrutura do modelo tenta-se explorar grupos maiores como  $SU(5)$ ,  $SO(10)$ ,  $E_6$ , mas tem-se dificuldade em obter evidência experimental. Sabe-se que os três parâmetros de acoplamento associados às três forças convergem em torno de  $10^{15}$  GeV que não é alcançável com os equipamentos disponíveis.

## 2. Etapas do modelo

[I] Selecionar o grupo matemático que determina os campos de intermediação da interação. A quantidade de campos é igual à dimensão da representação adjunta desse grupo. Para a interação fraca entre léptons são necessários três campos que correspondem a três bósons vetoriais. O grupo mínimo unitário cuja representação adjunta tem dimensão três é  $SU(2)$ . Para a interação eletromagnética entre léptons basta apenas um campo. O grupo mínimo unitário cuja representação adjunta tem uma dimensão é  $U(1)$ .

$$SU(2) \otimes U(1) \quad (267)$$

São  $2^2 - 1 = 3$  matrizes  $SU(2)$  conhecidas como matrizes de Pauli,

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (268)$$

São  $3^2 - 1 = 8$  matrizes  $SU(3)$  conhecidas como matrizes de Gell-Mann.

[II] Selecionar os férmions primários ou fundamentais que definem o modelo. Para a interação eletrofraca tem-se:

$$e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau \quad (269)$$

[III] Selecionar a representação mínima do grupo na qual os férmions são colocados. Por exemplo os dubletos  $SU(2)$ .

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (270)$$

Cada dubleto pode ser separado em partícula livógira,  $L$ , ou dextra,  $D$ .

$$L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad (271)$$

$$D = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad (272)$$

em que  $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ .

[IV ] Introduzir os termos de interação.

[V ] Especificar a composição final do modelo.

[VI ] Escrever o lagrangiano globalmente invariante. Como o lagrangiano é extremamente extenso divide-se em setores.

$$\mathcal{L}_{EF} = \mathcal{L}_{Ci} + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{Ca} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{HV} + \mathcal{L}_{WVW} + \mathcal{L}_{WVWV} + \mathcal{L}_Y \quad (273)$$

[VII ] Escrever o lagrangiano correspondente que seja localmente invariante.

[VIII ] Utilizar o mecanismo de quebra espontânea de simetria para obter a expressão final do lagrangiano.

O modelo padrão não é invariante com relação à paridade (P) ou reversão do tempo (T), mas é invariante com relação a operação transformada CPT em que C é a operação de conjugação da carga.

- Ian J. R. Aitchison, Anthony J. G. Hey, *Gauge theory in particle physics*, CRC Press, 3rd Rev ed. (2002).
- Ian D. Lawrie, *A unified grand tour of theoretical physics*, 2ª Ed., Institute of Physics Publishing, Bristol (2002).
- Akash Jain, *Notes on symmetries in particle physics*, arXiv:2109.12087v1 [hep-th] 24 Sep 2021.

### C. Campo quântico via integral de caminho

A próxima etapa é utilizar a teoria para estimar resultados experimentais ou fazer previsões. Para isso pode-se utilizar a técnica da integral de caminho. De acordo com a notação elaborada por P.A.M. Dirac,  $|0\rangle$  representa o estado quântico do vácuo e  $\langle 0|$  o complexo conjugado. Para ilustrar a técnica da integral de caminho considere-se a equação de Erwin Schrödinger. Quando sistema quântico evolui tem-se,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \implies \Psi = \Psi(0)e^{-i\frac{H}{\hbar}t} \quad (274)$$

De maneira que uma partícula surge do vácuo propaga pelo universo e depois desaparece no vácuo. Esse processo é descrito de maneira natural pela teoria quântica do campo ou campo quântico.

$$\langle 0|e^{-i\frac{1}{\hbar}H(t_M-t_N)}|0\rangle \quad (275)$$

em que  $H$  está associado à energia da partícula e  $t_M - t_N$  é o tempo de vida da partícula.

De acordo com o princípio da incerteza,

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{h}{\Delta t}. \quad (276)$$

Para flutuação bem pequena no tempo ocorre grande flutuação de energia. Essa grande flutuação pode fazer surgir partículas,  $m = \mathcal{E}/c^2$ .

Para obter a representação da mecânica quântica pela integral do caminho considere-se que a partícula evolui do estado  $A$  para o estado  $B$  no intervalo de tempo  $T$ . Há uma infinidade de possíveis rotas que podem ser utilizadas para ir da posição  $q_A$  para a posição  $q_B$ . A evolução temporal com base na mecânica quântica de Erwin Schrödinger na notação de Paul A. M. Dirac.

$$\langle q_B | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | q_A \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle q_N | \prod_{k=1}^{N-1} e^{-i\frac{1}{\hbar}(\mathcal{E}_c(\dot{q}) + \mathcal{E}_p(q))\frac{T}{N}} | q_0 \rangle \quad (277)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \int \langle q_{k+1} | e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_c(\dot{q})\delta t} (|q_k\rangle\langle q_k|) |q_{k-1}\rangle e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_p(q)\delta t} dq_k \quad (278)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \int e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_c(\dot{q})\delta t} \langle q_{k+1} | p \rangle \langle p | q_k \rangle \langle q_k | \frac{dp}{2\pi} | q_{k-1} \rangle e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_p(q)\delta t} dq_k \quad (279)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \int e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_c(\dot{q})\delta t} e^{ip(q_{k+1}-q_k)} \frac{dp}{2\pi} e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_p(q)\delta t} dq_k \quad (280)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{-i2\pi m}{\delta t} \right)^{N/2} \prod_{k=1}^{N-1} \int e^{i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_c(\dot{q})\delta t} e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_p(q)\delta t} dq_k \quad (281)$$

$$= \int e^{i\frac{1}{\hbar} \int_0^T L(q, \dot{q}) dt} Dq \quad (282)$$

$$= \int e^{i\frac{1}{\hbar}S(q)} Dq \quad (283)$$

em que  $\langle q_A | = \langle q_0 |$ ,  $\langle q_B | = \langle q_N |$ ,  $\int |q_k\rangle\langle q_k| dq_k = 1$ ,  $\int |p\rangle\langle p| dp = 2\pi$ ,  $\langle p | q_k \rangle = e^{-ipq_k}$  e  $S(q)$  é a ação que depende do caminho utilizado.

Em termos dos estados  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$ .

$$\langle B | q_B \rangle \langle q_B | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | q_A \rangle \langle q_A | A \rangle \quad (284)$$

Calcula-se a integral.

$$\int \int \langle B | q_B \rangle \langle q_B | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | q_A \rangle \langle q_A | A \rangle dq_A dq_B \quad (285)$$

$$\langle B | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | A \rangle \quad (286)$$

O estado inicial e o estado final podem ser o vácuo ou estado fundamental.

$$Z \equiv \langle 0 | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | 0 \rangle = \int e^{i\frac{1}{\hbar}S(q)} Dq \quad (287)$$

Para construir a mecânica quântica relativística de Paul Dirac escreve-se a ação em termos da densidade do lagrangiano de maneira que todas as dimensões recebem tratamento igualitário.



$$S(q) = \int \mathcal{L} dx^\mu \quad (288)$$

A junção entre teoria da relatividade e teoria quântica faz surgir as anti-partículas e junto com elas o conceito de *spin* e as estatísticas associadas.

Caso simples em unidades naturais (Apêndice A,  $\hbar = 1, c = 1$ ).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] + J\phi \quad (289)$$

Resolve-se para a obter a função de Green ou propagador do sistema em que  $J = 0$ .

$$\frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2]G(x-y) = \delta^4(x-y) \quad (290)$$

$$\int \int d^4x d^4y J(x)G(x-y)J(y) \quad (291)$$

No domínio de Fourier,

$$\int \int d^4k J(k)^* G(k) J(k) \quad (292)$$

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (293)$$

Obtem-se a energia,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{k^2 + m^2} d^3k = -\frac{1}{2\pi r} e^{-mr} \quad (294)$$

Para o caso eletromagnético,

$$G_{\nu\lambda}(k) = \frac{-g_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda / m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (295)$$

Usa-se que  $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$  que no domínio de Fourier  $k_\mu J^\mu(k) = 0$ .

$$\mathcal{E} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{k^2 + m^2} d^3k = \frac{1}{2\pi r} \quad (296)$$

Cargas de mesmo sinal se repelem.

$$F = -\frac{d\mathcal{E}}{dr} = \frac{1}{2\pi r^2} \quad (297)$$

- Richard Feynman, Steven Weinberg, *Elementary particles and the law of physics - the 1986 Dirac memorial lectures*, Cambridge University Press, Nova Iorque (1987).
- A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Princeton University Press, Princeton (2003).
- M. Chaichian et al., *Introduction to Gauge Field Theories*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1984).
- Ian J. R. Aitchison, Anthony J. G. Hey, *Gauge theory in particle physics*, CRC Press, 3rd Rev ed. (2002).